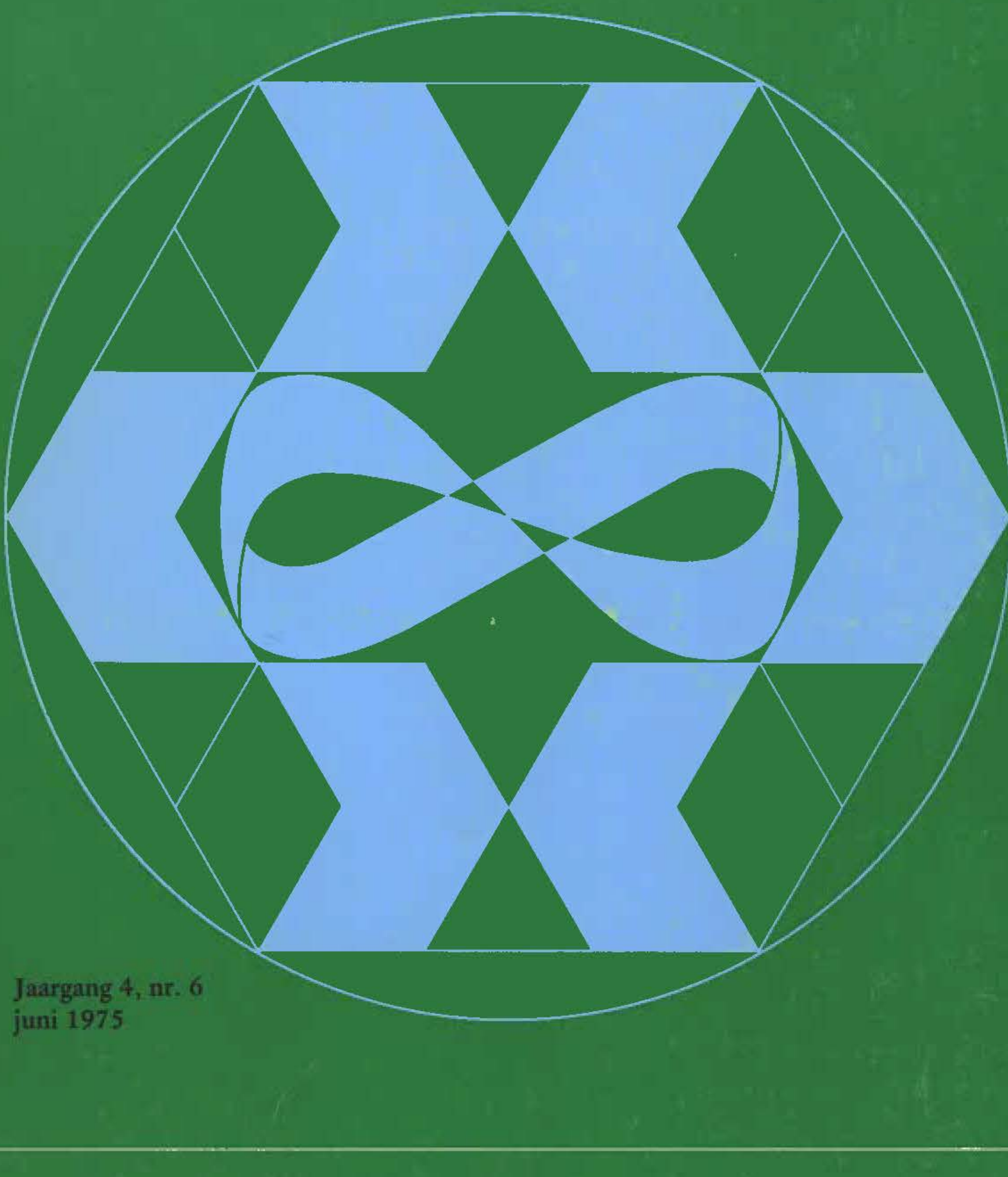
wiskobas bulletin



Jaargang 4, nr. 6
juni 1975

WISKOBAS-BULLETIN

– Bulletin ter begeleiding van het wiskunde-onderwijs
– Verschijnt gedurende de vierde jaargang 6 keer

Jaargang 4, nr. 6 – juni 1975

Redaktieadres
INSTITUUT ONTWIKKELING WISKUNDE ONDERWIJS
Tiberdreef 4, Utrecht.
t.a.v. R.A. de Jong.

Abonnementenadministratie
STICHTING IVIO,
Postbus 37, Lelystad.
Voor aanmeldingen, adreswijzigingen, betalingen, enz.

Abonnementsprijs
Per jaargang *f* 30,–.
Reduktietarief voor studenten P.A. en wiskobas-kursisten *f* 20,–.
Gelieve uitsluitend te betalen met aksept-girokaarten. Deze worden u toegezonden.

INHOUD

Vast blok
Redaktioneel 486
Kolommen: H. Freudenthal 488
Wiskunst: F. van der Blij 490
Problematika: Huub Jansen 496
Berichten uit het binnenland: Louis Gilissen . . 500
Berichten uit het buitenland: Klaas Koster . . . 504
Nieuw op de markt: Ed de Moor 506
Wiskunde: één grote fiktie: Jan van den Brink . 508
Prikbordproblemen: Hans ter Heege 511
Opleiding: Huub Jansen 514
Bevolkingsgroei: Wim Sweers 520
Kleuters en wiskunde: Jes Melis en Henneke de Lorme-Bakker 530
Kijk ook eens zo!: Dik Oort 532

Variabel blok
6.1 Inleiding en leeswijzer: Fred Goffree 536
6.2 Gewichtig allerlei: Fred Goffree 539
6.3 Het toekennen van getallen aan stroken: Jan van den Brink 543
6.4 Temperatuurgrafieken: Marjan Buenk en Johan van Bruggen 548
6.5 Roetes op het stadsplan: Hans ter Heege . . 552
6.6 Slim werken met getallen: Leen Streefland 556
6.7 De fiets: Huub Jansen 562
6.8 Doe-ideeën: Ed de Moor 568

Respons blok
6.1 Inleiding 574
6.2 Frie van de Molengraaf 575
6.3 Beeldstrips 579
6.4 Spionnen in de stad 581
6.5 Verkenningsreis op de kubus 584
6.6 Poppenkast in de kleuterschool 588
6.7 Wisselen in pakistan 592
6.8 Hé, jij daar! 594
6.9 Grafieken en diagrammen 596

Los blok
De trein 600
Bruggen 601
Tram, trein, bus 602
Vaarafstand en vaartijd 603
Jan op de fiets 604
Driehoeksgetallen 605
Cirkels en lijnstukken 608
Cirkelspijkerbord 610
Doe-idee M_{10} 612
Doe-idee M_{11} 613
Doe-idee M_{12} 614

Aan de abonnees van het Wiskobas – Bulletin

Ook in de komende (vijfde) jaargang zal de stichting IVIO te Lelystad de eksploitatie van het Bulletin verzorgen. Voor de abonnementenadministratie (aanmeldingen, betalingen, adresmutaties, e.d.) kunt u bij deze stichting terecht.

De totale omvang van de vijfde jaargang zal 528 pagina's bedragen, verdeeld over 5 of 6 afleveringen.

De vijfde jaargang zal een 'sleuteljaargang' worden. Niet alleen omdat een totaaloverzicht van het wiskobas-integratieplan hierin gepubliseerd zal worden (dubbelnummer 2/3), maar ook omdat u in enkele volgnummers (4 en 5) zult kunnen kennis maken met representatieve, afgeronde stukken wiskunde-onderwijs voor alle leerjaren van de basisschool. Voorts zal nummer 1 beschouwingen bevatten omtrent de stand van zaken bij wiskobas nu (medio 1975), terwijl nummer 6 volledig gewijd zal zijn aan bijdragen uit het onderwijsveld.

De redaktie is gedwongen om – gezien het sterk gestegen eksploitatietekort – de abonnementsprijzen met f 10,– te verhogen.

Aanmelding

Individuele abonnementen	*(f 40,–):*	*briefkaart naar stichting IVIO (Postbus 37, Lelystad).*
Reduktie abonnementen	*(f 30,–):*	*via docent pedagogische akademie/lerarenopleiding/kleuterleidstersopleiding/heroriënteringskursus naar IOWO (Tiberdreef 4, Utrecht).*

Afmelding

We gaan er van uit dat de abonnees die reeds in het bestand zijn opgenomen, prijs blijven stellen op een abonnement. Mocht dit niet het geval zijn, dan verzoeken wij u onderstaande kaart uit te scheuren, in te vullen en vóór 20 augustus a.s. in te zenden.

Betaling

U wordt verzocht om uitsluitend via akseptgirokaarten te betalen. De stichting IVIO zal deze kaarten binnenkort verzenden.

AFMELDING S.V.P. IN BLOKLETTERS INVULLEN

ONDERGETEKENDE,

naam : ....

adres : ....

woonplaats : ....

☐* individueel abonnement

☐* reduktie abonnement,

indertijd opgegeven via docent ....

van de opleiding te ....

zegt hiermee zijn/haar abonnement op het Wiskobas-Bulletin op.

.................., ... 1975

* aankruisen wat van toepassing is

vast blok

INHOUD

Redaktioneel 486

Kolommen 488
H. Freudenthal

Wiskunst 490
F. van der Blij

Problematika 496
Huub Jansen

Berichten uit het binnenland 500
Louis Gilissen

Berichten uit het buitenland 504
Klaas Koster

Nieuw op de markt 506
Ed de Moor

Wiskunde: één grote fiktie 508
Jan van den Brink

Prikbordproblemen 511
Hans ter Heege

Opleiding 514
Huub Jansen

Bevolkingsgroei 520
Wim Sweers

Kleuters en wiskunde 530
Jes Melis en Henneke de Lorme-Bakker

Kijk ook eens zo! 532
Dik Oort

redaktio-neel

VREUGDELOZE SUFFERDS OF ENTOESIASTE GEWONELINGEN?

'De onderwijzer van jeroen is heel goed. Het is een gewone man.'

Vermoedelijk zullen heel wat ouders voor hun jeroennen het liefst ongewone onderwijzers willen hebben. Maar waaraan denken zíj dan bij 'ongewoon'?

Een gewone man (met een konfektiepakkie an) is iemand zonder kapsones, die zich gedraagt volgens de spelregels waaraan wij gewend (=gewoon) zijn. Met de ongewoneling weten we niet zo goed raad omdat hij anders is.
Ligt de klemtoon even verschillend en zeggen we dat de onderwijzer van jeroen (maar!) een heel gewóne man is dan bedoelen we dat hij niet bij ons past: hij eet onbehouwen, kleedt zich niet netjes en tapt gore moppen.
Hij is niet 'gewoon' gewoon, hij is té gewoon en heeft zich aldus buiten de middelmatigheid begeven.

ROB DE JONG

'De onderwijzer van jeroen is een middelmatig man.' 'Middelmatig' heeft in onze taal de betekenis van 'niet uitnemend zijn' (Van Dale). Nu is dat onvolledig, want met evenveel recht hoort erbij: niet stompzinnig zijn. 'Middelmatig' is immers *tussen* iets in, tussen uitersten van begaafdheid, motivatie, lengte, inkomen, enz.
Het woord lijkt echter losgeslagen van de letterlijke betekenis. Een taalkundige zal ongetwijfeld kunnen verklaren waarom het betekenisaksent op het tweede deel van het woord is komen te liggen. Een taalgebruiker kan slechts konstateren dat de uitspraak 'de onderwijzer van jeroen is middelmatig' bedoelt over te brengen dat hij (maar!) een matig onderwijzer is.

Zit er niet iets elitairs in om het middelmatige afkeurenswaardig te achten? Leert de taal ons dat we het gewone, het middelmatige diskrimineren?
Spreekt uit de angst voor nivellering – een begrip dat je met de losse pols zou kunnen omschrijven als: neiging tot middelmatig gedrag – een bezorgdheid om het verdwijnen van 'het uitnemende' of een heimelijke wens om 'het stompzinnige' te laten voortbestaan?

Begrippen als 'middelmatig' en 'gewoon' funktioneren het duidelijkst bij een konstaterend gebruik: je stelt vast dat iets middelmatig is omdat het niet ekstreem is. Wordt zo'n begrip waarderend gebruikt, dan moet deksels goed worden opgepast.
Het volgende (ware) verhaal illustreert hoe middelmatigheid eveneens kan verwijzen naar muffe, vervelende fantasieloosheid.

* * *

Terugkijkend naar zijn onderwijsloopbaan kon de leraar wiskunde en didaktiek aan de pedagogische akademie te r. zijn hart luchten. Tijdens een feestelijke bijeenkomst ter gelegenheid van zijn pensionering bracht hij een zekere bezorgdheid onder woorden. Een bezorgdheid die we enige dagen later aan het eind van een ouderavond door één van de aanwezige moeders opnieuw hoorden vertolken: het onderwijs zou aan zijn eigen middelmatigheid ten gronde gaan.

'De romantiek, de jus, de ongeregelde genialiteit is uit het onderwijs verdwenen. Techniek en fantasieloze, plichtsgetrouwe middelmatigheid vieren hoogtij. De scholen zijn kleurloos en saai en hebben de leerlingen niets meer te zeggen.
Of het nu komt omdat het onderwijssisteem gortdroog is en niemand privé-hebbelijkheden meer toestaat of omdat wij (onze generatie opvoeders) nietszeggend zijn, konstateerbaar is dat onze

leerlingen nauwelijks geïnspireerd worden.
De leraar ziet bijna uitsluitend wat lauwe figuren in de klas, die ongeïnteresseerd en een tikje vermoeid de lessen uitzitten. Waar is de leerling met liefhebberijen gebleven: de veldbioloog in spe, de keienverzamelaar, de dichter, de archivaris?'

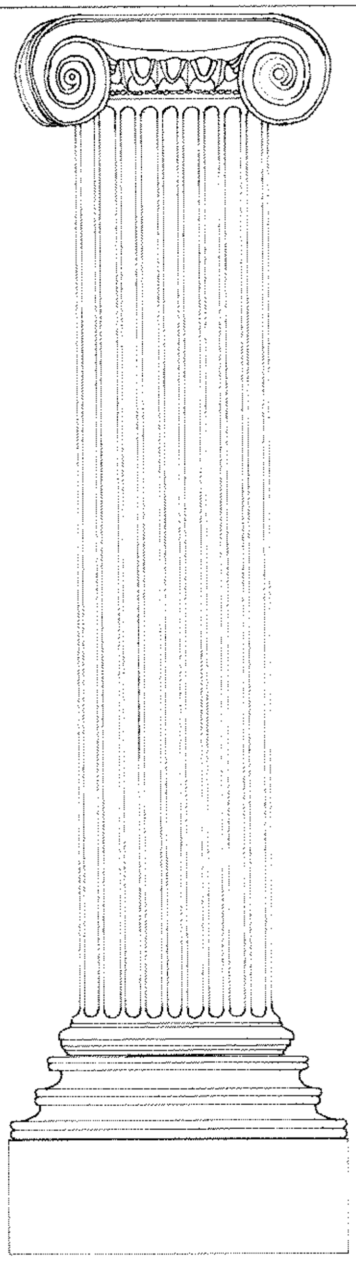
Naast bovenstaande verzuchting leggen we de alombekende klaagzang uit de lerarenkamer: de leerlingen zijn dit jaar wéér slechter/zwakker!
Wat is er aan de hand? Worden de leerlingen inderdaad ieder jaar slechter (daling van de gemiddelde prestaties) of zijn de uitersten aan het verdwijnen (minder spreiding in de prestaties) of allebei?
Naar de mening van de wiskundedidaktikus en van de belangstellende moeder is het onderwijs kleurloos geworden waardoor (of: omdat) én de uitblinker én de stommeling zich niet meer kan manifesteren.
Natuurlijk, de uitersten blijven het langst in de herinnering. De keienverzamelaar en de rebel worden onthouden, terwijl hun onopvallende medeleerlingen uit het beeld zijn verdwenen. Toegegeven, terugblikken zijn sterk persoonlijk getint. Ze mogen dat ook zijn omdat op dergelijke momenten koele registraties niet passen. Nochtans zijn waarheden niet het eksklusieve eigendom van de wetenschappelijke aanpak. Persoonlijke ontboezemingen kunnen zeer veel onthullen.
Stel nu dat er een grond van waarheid in zit, dan dienen we ons de genoemde bezorgdheid in hoge mate aan te trekken. Als de kleuren uit het onderwijs verdwijnen, als het allemaal vaal aan het worden is, dan moet er heel hard aan de bel worden getrokken. Kleurloos onderwijs is immers slechter dan slecht onderwijs. Wie of wat zou hier dan verantwoordelijk voor zijn?

We vatten kort het vervolg van het betoog samen:

'Wie maakt de kleur in het onderwijs? Kan een kleurloze leraar felle kleuren oproepen of zal hij juist neutraliserend werken, waardoor zijn leerlingen zich rond een gemiddeld beeld gaan gedragen? Als de getalenteerde leerling en de driedubbelovergehaalde domoor niet meer te vinden zijn op de scholen, zijn de kleurrijke, schilderachtige leraren er dan nog wel?
Zijn de uitersten in het lerarenkorps soms eveneens aan het 'uitsterven'?
Misschien is de slordige, inkonsekwente, dwaze, onbegrijpelijke wiskundeleraar vervangen door een kompetente uitlegger en de dichterlijke, broze engelse juf door een kapabele praktikumhanteerder.
Misschien is de ontwikkeling van het eksentrieke naar het gewone, heel gezond en gewenst. Wie zal het zeggen? Indien echter 'het gewone' niet anders is dan vreugdeloze alledaagsheid, dan hoeven we ons niet over het geringe élan van onze leerlingen te beklagen.
Natuurlijk, ook in de uitgebluste school kunnen eisen gesteld worden, maar nooit hoge. Als de school kleurloos is voor de leerlingen en hooguit een instituut aan de periferie van hun bestaan, dan hebben wij, leraren, dat aan onszelf te danken. Kennelijk zijn we niet boeiend!'

Dat liegt er niet om! Alle zelfgenoegzaamheid die ons als leraren vroeger werd toegemeten, moet hier wel ineenschrompelen.
Of het allemaal waar is?
Zijn we nu werkelijk zo'n stelletje suffende onderwijsgewonelingen? Treft ons werkelijk alle blaam?
We kunnen enige troost vinden in de gedachte dat de leraar niet meer de eksklusieve positie van weleer heeft. Er is te veel konkurrentie gekomen. Wie kan er nu op tegen televisiehelden als Kojak, McCloud en André van Duin's pretmachine? Kunnen we ons ooit meten, hoe boeiend en amusant onze naaste familie ons ook vindt, met gigantische miljoenenverslindende voetbalevenementen?
De vraag is òf we dat zo nodig moeten willen. Wanneer we de leerlingen willen boeien met kabaret-imitaties en spannende stories, maken we hen tot onderwijsgenieters en onszelf tot lachwekkende klowns. En is dat nu niet *al te gewoon?*
Is dat, op langere termijn, de weg waarlangs leerlingen betrokken raken in engelse literatuur, bevolkingsproblemen in zuidamerika en wiskundige redeneringen?
Onze kollega in r. doelde met zijn betoog op iets anders. Het ging hem niet om een wervelende onderwijsshow met de leerlingen als hooggeëerd publiek, maar om het vakentoesiasme van de man voor de klas.
Entoesiasme van de leraar maakt een vak, een onderwerp boeiend, hoe knullig en hoe weinig 'televisieprofessioneel' misschien ook gebracht. Door de toevoeging stijgt het onderwerp boven het alledaagse uit.
En .... entoesiasme is nooit 'gewoon', altijd uniek, hoeft niet opgebracht te worden want zit ingebakken in iedere 'gewone' leraar die van zijn vak houdt.
Onderwijs mag dan een ongewoon vak zijn, het moet gegeven worden door *gewone mensen*. Gewone mensen en met een heleboel kleur.
Alleen mensen die in dit opzicht ongewoon zijn kunnen het onderwijs kleurloos maken.

kolommen



LISTEN EN LAGEN VAN HET KANSBEGRIP

H. FREUDENTHAL

Jan heeft nieuwe buren gekregen. Ze hebben twee kinderen van zijn leeftijd – dat weet hij al. Hoe groot is de kans dat er tenminste één een jongen is?
De kansen op jongen of meisje zijn ongeveer gelijk (er is een klein verschil, dat we hier zullen verwaarlozen). Het kinderpaar van de buren kan zijn

JJ, JM, MJ, MM.

Vier gevallen, even waarschijnlijk, en alleen in één geval is er geen jongen bij. De kans op tenminste één jongen is drie op de vier, oftewel $\frac{3}{4}$.
Nu komt jan te weten dat er toch op zijn minst één meisje bij is (doordat een van de kinderen toevallig de straat op liep of omdat een poppenwagen tussen de verhuisspullen opdook).
Hoe groot is nù de kans op tenminste één jongen?
Wel, het geval JJ is nu komen te vervallen. Het zijn er nog drie, waarvan twee voor jan gunstig, dus is de kans nu $\frac{2}{3}$.
Ja, dit verhaal staat in leerboeken en het deed kort geleden ook mondeling in ons land de ronde.
Iedereen die je de vraag stelt, zegt: de kans is nu $\frac{1}{2}$. Hij kan het misschien niet direkt motiveren, hij voelt het zo aan. Hij voelt het goed aan en hij doet goed zich door een schijnredenering niet van de wijs te laten brengen. Het is trouwens een schijnredenering die periodiek – nieuw ingekleed – terugkeert.

* * *

Laten we de zaak analiseren. Oorspronkelijk bestond jan's informatie in de wetenschap dat er twee kinderen waren. Hij weet nu dat tenminste één ervan een meisje is. Wat weet hij nu omtrent het andere? Hij weet niet meer en niet minder dan dat de ander een zusje heeft. Wel, er zijn evenveel jongens als meisjes die een zusje hebben, en dus is de kans dat het buurkind van onbekend geslacht een jongen of een meisje is, dezelfde.
De kans op tenminste één jongen nù is niet $\frac{2}{3}$, maar $\frac{1}{2}$.

* * *

Maar wat klopte in de redenering daarstraks niet? Dit is een andere vraag en die tot op de grond na te gaan is echt de moeite waard.
Hoe kun je je voor nieuwe fouten behoeden?
Volgens jan's oorspronkelijke informatie had het buurgezin twee kinderen. De populatie gezinnen waartoe het behoorde was door

JJ, JM, MJ, MM

beschreven. Alle vier soorten ongeveer evenveel.

Jan's nieuwe informatie reduseert die populatie.
Hoe?
Natuurlijk: JJ vervalt.
Maar ook van JM en MJ vervalt iets; een kind is toevallig de straat op gekomen (of iets dergelijks), en dit had een jongen of een meisje kunnen zijn, allebei met dezelfde kans. Dus van de JM vervalt de helft, en evenzo van de MJ. De populatie van gezinnen na Jan's nieuwe informatie is

$\frac{1}{2}$JM, $\frac{1}{2}$MJ, MM.

Hoe groot is de kans op een jongen in de gezinnen van deze populatie? De $\frac{1}{2}$JM- en de $\frac{1}{2}$MJ-populatie zijn samen even groot als de MM-populatie. In de MM-populatie is de kans op een jongen 0, in de gezinnen van de $\frac{1}{2}$JM- en $\frac{1}{2}$MJ-populatie tref je zeker een jongen aan, dus met de kans 1. Dus is de kans op een jongen in het buurgezin, zoals ook daarstraks berekend: $\frac{1}{2}$.
Waar kwam de fout vandaan? We hadden gerekend alsof door de nieuwe informatie alleen de MM-gezinnen waren geëlimineerd en er geen rekening mee gehouden, dat van de JM- en MJ-gezinnen de helft verviel.

* * *

Stel de *anwb* wil weten, welke afstand een automobilist in nederland gemiddeld per reis aflegt. Ze zetten ergens – op een of meer plaatsen – mensen neer die de auto's moeten aanhouden en de bestuurder vragen waar hij vandaan komt en waar hij naar toe gaat. Van de zo verkregen kilometers wordt het gemiddelde genomen. Is dit een redelijke benadering van de afstand, die een automobilist gemiddeld per reis aflegt?
Neen, deze steekproef is niet wat je noemt representatief voor het geheel. Zij die lange reizen maken, hebben een grotere kans in de steekproef te worden opgenomen dan de korte-afstand-reizigers.
Laten we dit met een kras voorbeeld duidelijk maken. We nemen een trajekt van 100 km met één auto erop, die de hele 100 km rijdt en 100 auto's die maar 1 km rijden. Hoe lang is dan de gemiddelde reis?

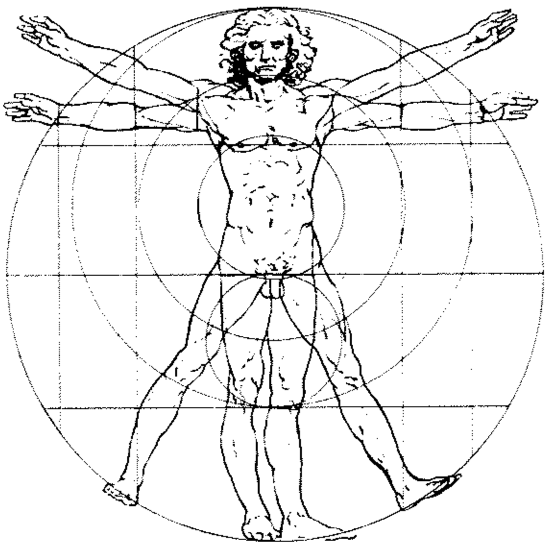
$(100 \cdot 1 + 1 \cdot 100) : 101 \cong 2$ (km).

Ik zet nu ergens een post neer. Wat zal daar langs komen? Eén auto waarvan de bestuurder zegt dat hij 100 km ver rijdt en gemiddeld één, die 1 km aangeeft. Mijn steekproef levert $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 100) : 2 \cong 50$, dus ongeveer 50 km op, in strijd met de net berekende 2 km.
Het is duidelijk waarom: in de steekproef kom je de langrijder met zekerheid en de kortrijders maar met een kans van 1% tegen. De steekproef deugt niet.

waar vandaan?
waar naar toe?

foto Hofland

wiskunst



GEZICHTSPUNTEN

F. VAN DER BLIJ

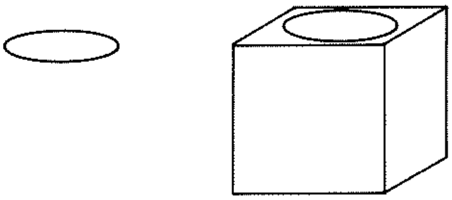
In de beeldende kunst, in het bizonder bij de beeldhouwkunst en de architektuur, speelt het gezichtspunt een grote rol. Men wil om een beeld heen lopen, in een ruimte rondwandelen. Verschillende standpunten geven verschillende waarnemingen van één en hetzelfde objekt.
De wiskundige heeft bij de beschrijvende meetkunde, vooral bij de metode van de drie ortogonale projekties, met dit beginsel gewerkt. Er zijn raadsels uit ontstaan: ik geef twee of drie projekties, hoe ziet het voorwerp eruit? Soms moet ook geraden worden naar de vorm van een stop die in verschillend gevormde gaten moet passen.
Bij het schilderij, de gravure, etc., lijkt het gezichtspunt van minder belang. Toch zijn er kunstwerken van dit type waarbij de afstand van de beschouwer tot het werk een grote rol speelt. Ik citeer *Salvador Dali* over de *Sixtijnse Madonna* (1958):

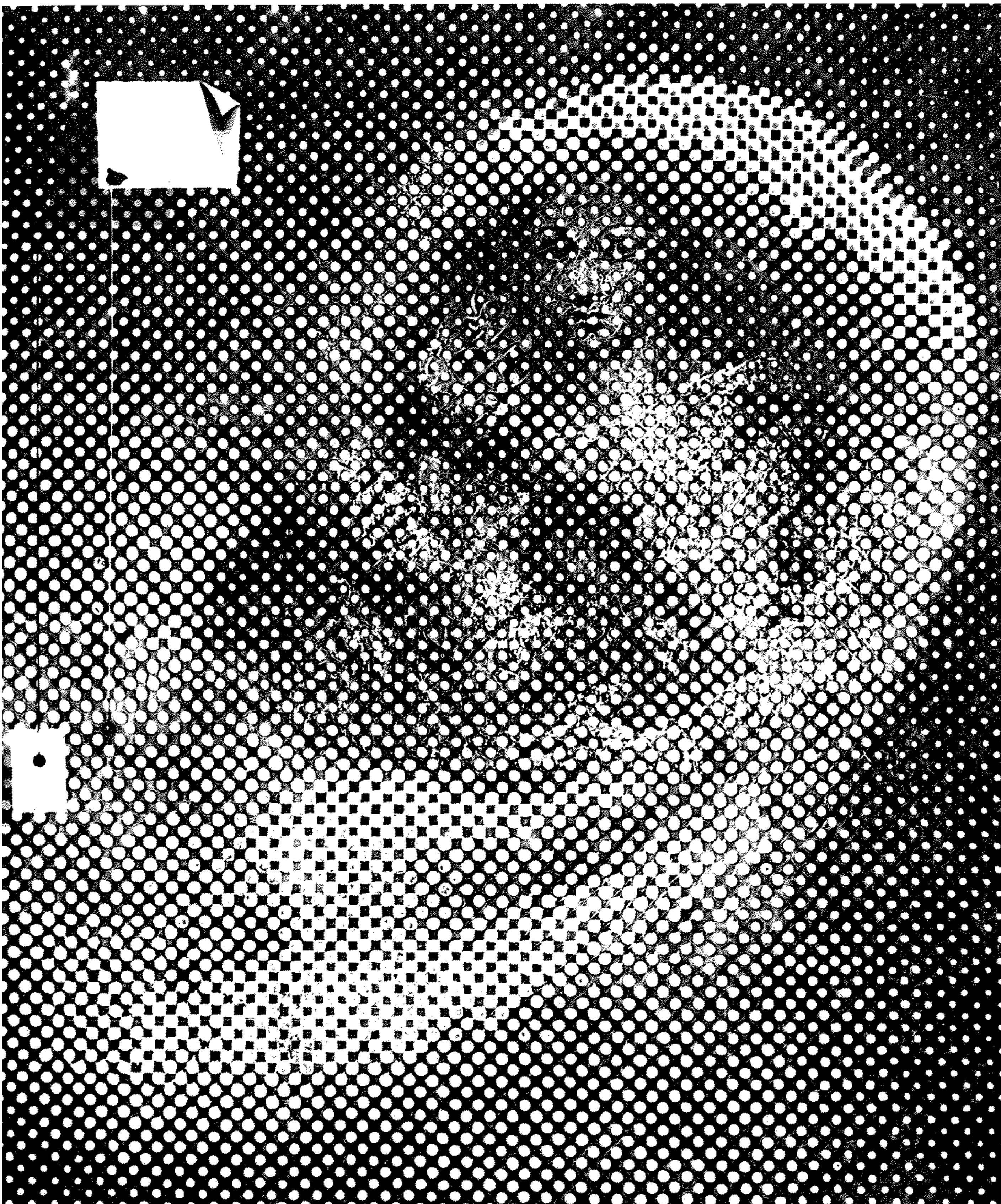
> 'Bijna grijs schilderij dat van dichtbij gezien een abstractie is; op twee meter afstand wordt het de Sixtijnse Madonna van Rafaël; op vijftien meter verschijnt het oor van een engel, dat één meter vijftig groot is, en geschilderd met de anti-materie, dus zuivere energie is.' (afb. 1)

Er zijn echter ook schilderijen, waarbij niet de afstand maar de blikrichting een rol speelt. In de bloeitijd van het spelen met perspektief vinden we de *anamorfe* kunst: schilderijen die pas duidelijk worden wanneer zij weerspiegeld zijn in een cilindervormige vaas en dergelijke. Het januarinummer (1975) van de *Scientific American* bevat van de hand van *Martin Gardner* verschillende wiskundige metoden om deze schilderijen te vervaardigen. We ontlenen er een voorbeeld van *Holbein* (1533) aan. (afb. 2)

De vreemde vorm, midden onder, is een schedel (kijk op afstand links onder, vlak langs de prent!). Het lukt ook via een spiegel, die je in de goede stand moet houden.
'Hing het misschien in een trappehuis, zodat je op een natuurlijke wijze de schedel vanuit een ongewoon gezichtspunt zou herkennen?', vraagt Gardner.

Een ellips zonder kontekst in een vlak getekend, herkennen we als een ellips.



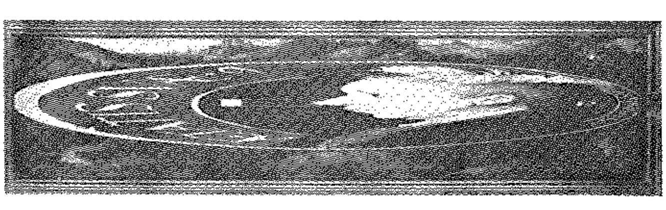


Dali: Sixtijnse Madonna afb. 1

Tekenen we dezelfde ellips in een kontekst, dan wordt hij in onze waarneming een cirkel.

Kunt u, door uw oog een bizondere stand ten opzichte van het vel papier te geven, de (pure) ellips ook als een cirkel zien?

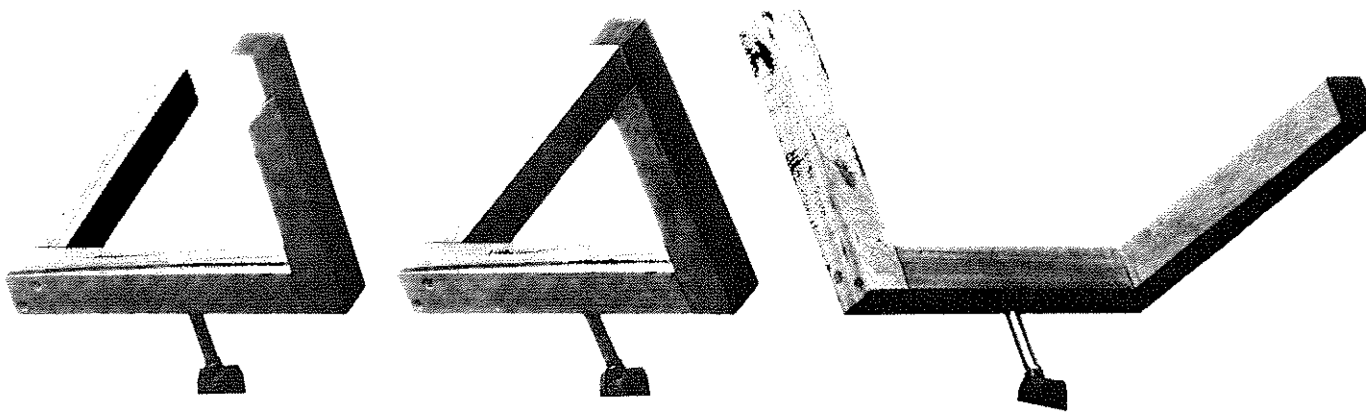
Holbein: De ambassadeurs afb. 2



Scrots: Edward VI afb. 3

Het portret van *Edward VI* van *William Scrots* uit 1546 is een ander voorbeeld. (afb. 3) Natuurlijk kan een schilder op deze manier afbeeldingen in een schilderij verbergen.

Een onschuldig bouwsel van drie latjes kan onder een dergelijke hoek bezien (c.q. gefotografeerd) worden, zodat een keurig beeld van een onmogelijke driehoek ontstaat. (afb. 4) De onmogelijke driehoek van *L.S.* en *R. Penrose* is in vele varianten terug te vinden, onder andere ook in werk van M.C. Escher.
De foto's van het gekke kratje zijn eveneens op deze manier gemaakt.



Penrose: onmogelijke driehoek afb. 4

Een kunstenaar die heel bewust gebruik maakt van blikrichting is de israëliër *Yaacov Agam* (geboren 1928). Ik citeer een paar regels uit zijn autobiografische notities:

'Zouden we niet elementen van vrijheid en onomkeerbaarheid moeten opnemen in de ordening van onze gewoontes en levensomstandigheden opdat iedere dag, ieder ogenblik unieke en verbazingwekkende gebeurtenissen worden.
De kalender/de tijd ontdoen van het schema van de week, de valse schijn ontnemen aan de dagen die op elkaar volgen en op elkaar lijken en waarop de doodse herhaling van onze dagelijkse en wekelijkse routinegebaren in het leven berust, zou een werkelijke betekenis *aan de realiteit/aan het leven* geven. Het zou *het leven/de werkelijkheid* inderdaad bewust maken van de vierde dimensie, van de vreugde van het mysterieuze, van het onverwachte en van het kortstondige.
Precies dàt heb ik met mijn werk willen bereiken.' [1])

Tot het werk van Agam behoren zowel skulpturen (bijvoorbeeld van buisframes die ten opzichte van elkaar bewegen) als tweedimensionale afbeeldingen. Niet helemaal tweedimensionaal zijn zijn metamorfosen. We geven drie afbeeldingen (helaas in zwart-wit) van een zelfde objekt, namelijk *Metamorfose 1957*. (afb. 7)
De cirkel ziet u als u er recht voorstaat. Staat u uiterst rechts of links dan ziet u de ellips met de daarin geschetste vormen.

Ik zou willen wijzen op drie belangrijke faktoren die bepalend zijn geweest voor al mijn zoeken en mijn gehele oeuvre:

1 het feit dat ik ben opgegroeid op Israëlische bodem - het stuk aarde dat zo rijk is aan tradities, die echter alle in een nieuwe vorm moesten worden gegoten om in de moderne maatschappij nog te kunnen funktioneren;
2 het feit dat ik de zoon ben van een rabbijn, die zijn gehele leven heeft getracht de geest te scheiden van de materie;
3 het feit dat ik de kabbala heb bestudeerd, waardoor ik de noodzaak ben gaan inzien van het zoeken naar een innerlijke waarheid.

Yaacov Agam. Neuchâtel, 1962. Blz. 13.

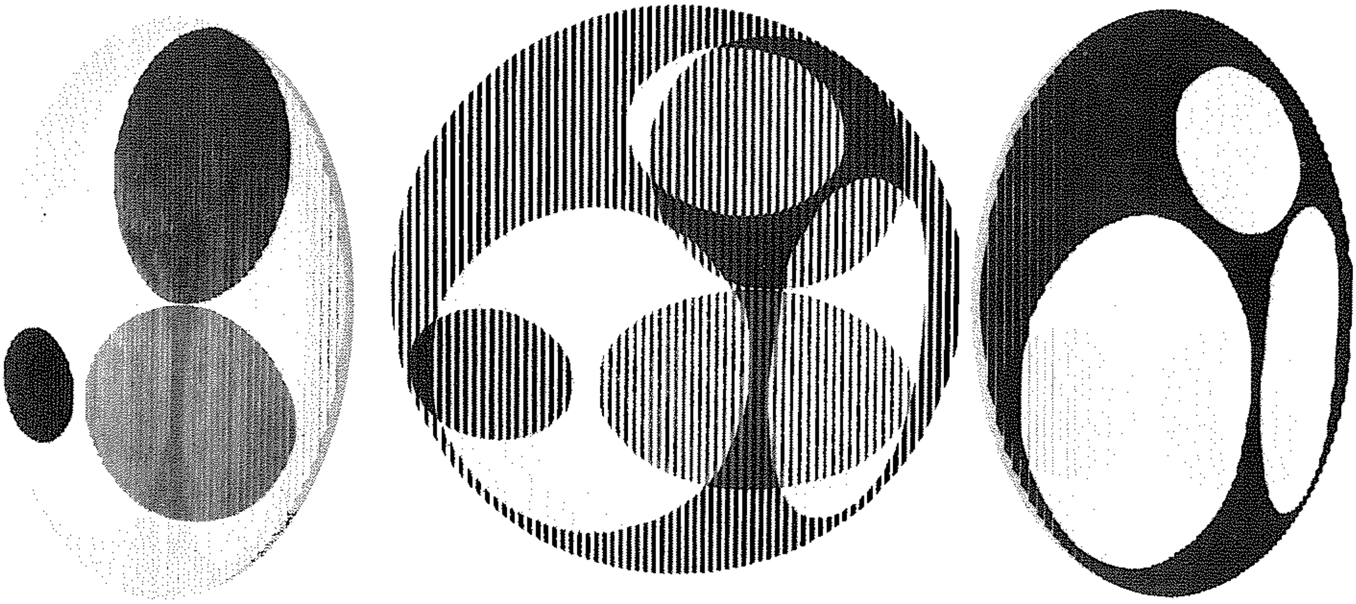
afb. 5

Hoewel ik mij in mijn werk bedien van algemeen geldende plastische waarden om mijn ervaringen in een gemeenschappelijke taal te registreren, moet ik nog eens met nadruk er op wijzen dat mijn werk een poging is om, buiten de wereld van de religie, een beeldvorm te vinden voor de begrippen van het Hebreeuwse filosofisch realisme en daardoor een toegang tot de wereld van de werkelijkheid. Mijn werk is dus meer realistisch dan abstrakt, want de beschouwer bevindt zich hier voor een wereld die 'Ondeelbaar en niet-Een' is.

Ariel. A Quarterly Review of the Arts and Sciences in Israël, 9, winter 1964-65.

afb. 6

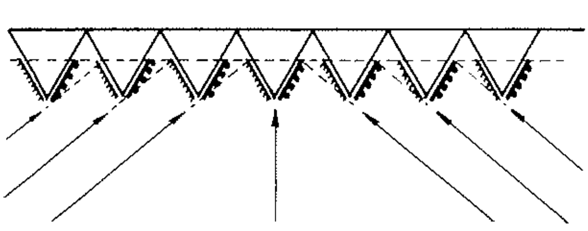
[1]) Katalogus stedelijk museum amsterdam, 26 januari 1973.



Agam: Metamorfose 1957

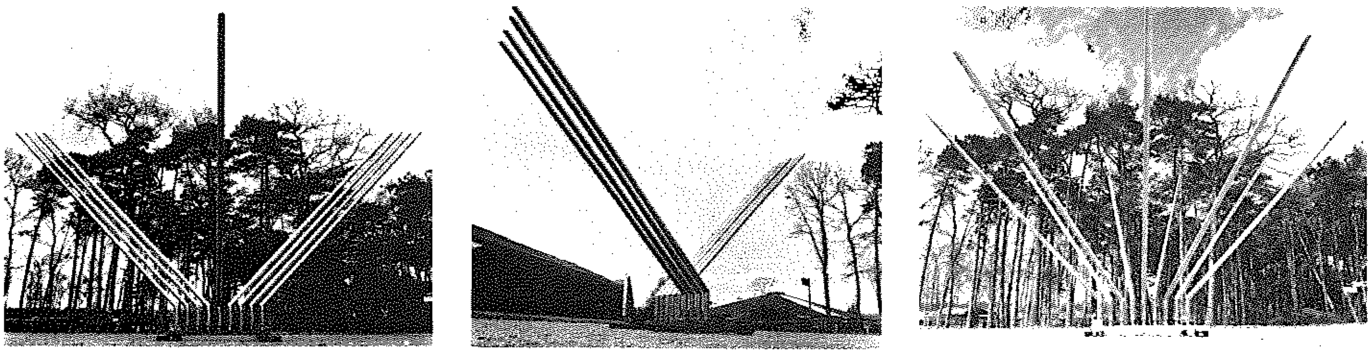
afb. 7

De konstruktie van dit objekt is eenvoudig:



Vanuit gezichtsrichting A vormen de met kleine streepjes aangegeven delen van de (houten) driehoekjes één ononderbroken vlak in het gezichtsveld. Men kan daarop een figuur aanbrengen.
Vanuit B echter vormen de met kleine rondjes aangegeven vlakdelen een ononderbroken vlak, waarop men een andere figuur kan aanbrengen. Vanuit C bezien, ziet men een mengeling.
De bovenste delen van de driehoeken kan men gebruiken om òf een geleidelijke overgang te bewerkstelligen òf de zijdelingse figuren zo lang mogelijk te handhaven. Hoe lang dit kan, hangt natuurlijk af van de gekozen tophoek van de gelijkbenige driehoekjes van het 'schilderij'. In de meest eenvoudige uitvoering ziet men vanuit A een zwart vlak, vanuit B een wit vlak en in een tussenperiode een vertikaal zwart-wit gestreept vlak.

Een wiskundige popelt om varianten te verzinnen en misschien zelfs uit te voeren. Ik noem slechts enkele voor de hand liggende: de driehoekige strips vervangen door vierzijdige piramiden, waardoor de aanblik van onder en van boven verschillend wordt. Dan eventueel het geheel monteren op een draaiende schijf waardoor bij stilstand van de beschouwer toch de 'gezichtsrichting' verandert. Vervolgens is men geneigd de piramiden door kegels te vervangen.
Enzovoorts, enzovoorts!

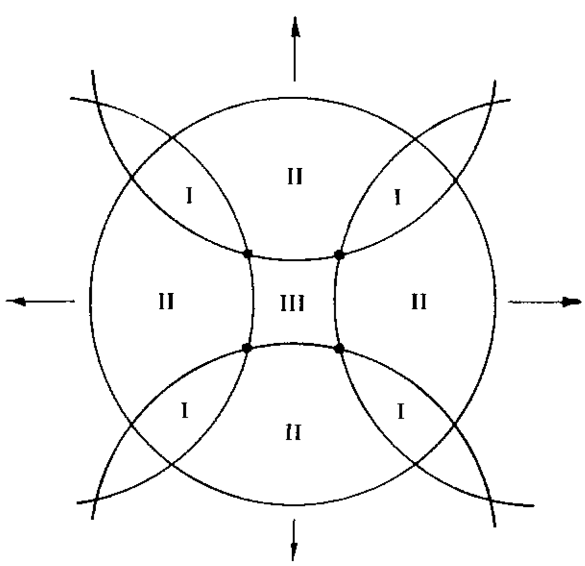


Agam: Alle richtingen 1972

afb. 8

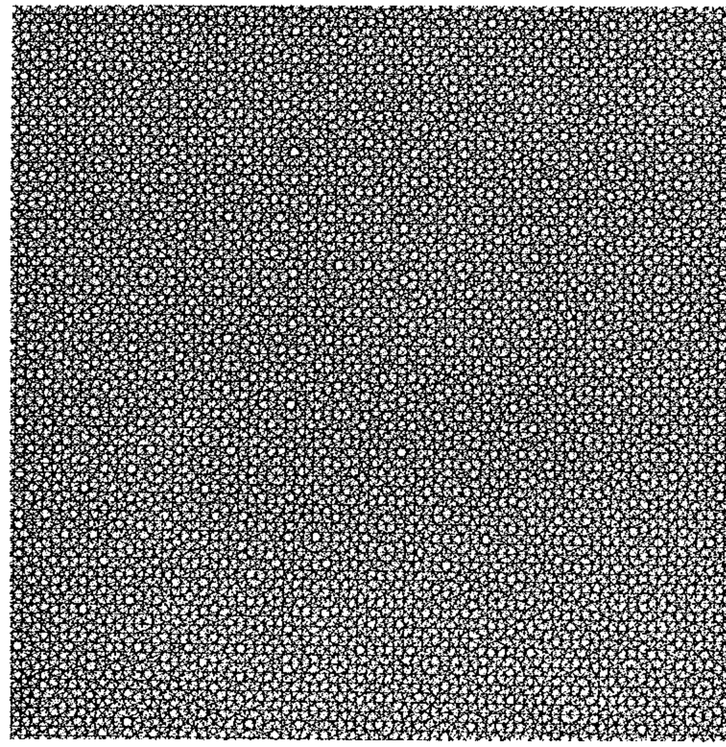
Bij andere tweedimensionale beeldende werken is het niet nodig allerlei uitzonderlijke blikrichtingen te introduseren, maar als men het toch doet krijgt men een duidelijk beeld van de opbouw van het kunstwerk. De titel van *Morellet: Screen Painting 0°, 22°5, 45°, 67°5* (1958), doet al iets vermoeden. (afb. 9) Als u het oog vrijwel op het papier houdt en de door de hoeken aangegeven richting aanhoudt, ziet u de basisstruktuur van stelsels evenwijdige rechte lijnen.

In het prachtige februarinummer van *Camera*[1]) kunt u een multipleoptik van *Gottfried Jäger* vinden. (afb. 10) Ook hier geeft het vlak langs het papier zien, inzichten in de struktuur van de ringetjesvervlechting. Er zit ook nog een andere meetkundige puzzel in verstopt. Een cirkel met straal 1 wordt gesneden door vier cirkels met dezelfde straal. Er ontstaan verschillende gebieden, die we samenvoegen tot de gebieden, I, II, en III. Bij het in- en uitschuiven van de vier cirkels veranderen de gebieden I, II en III van oppervlakte. Hoe komen deze veranderingen tot stand? Is het mogelijk dat de drie gebieden dezelfde oppervlakte hebben?



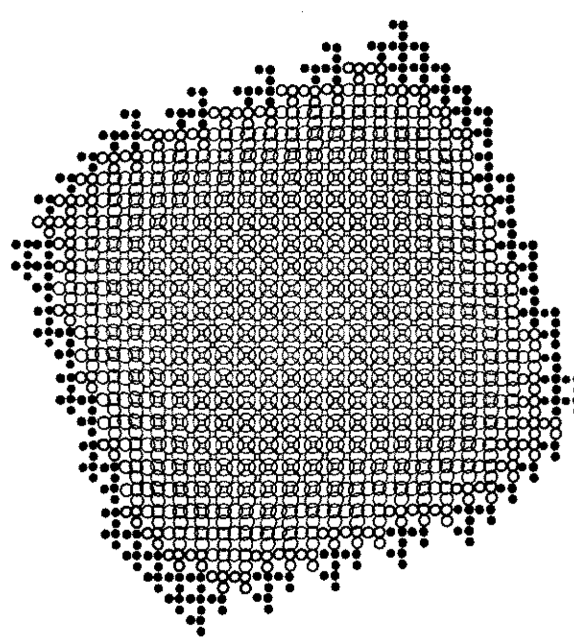
Het is allemaal elementair maar toch wel belangrijk rekenwerk. De liefhebbers wens ik veel sukses!

Wilt u overigens de figuur van G. Jäger als kompositie goed begrijpen, dan moet u de beschrijving lezen en de bijbehorende afbeeldingen bezien in het boek van *H.W. Franke,*



Morellet: Screen Painting 0°, 22°5, 45°, 67°5 afb. 9

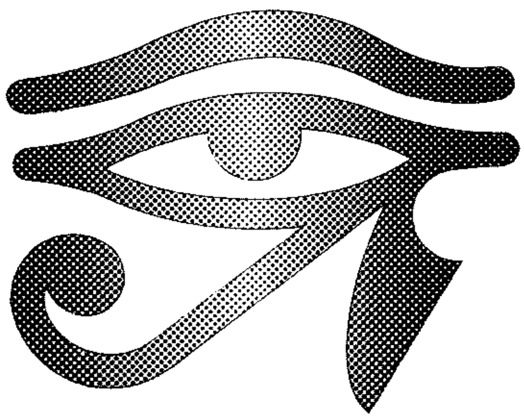
G. Jäger: Apparative Kunst, vom Kaleidoskop zum Computer (DuMont Schauberg, köln 1973, pag. 182 e.v.).



Jäger: Multipleoptik afb. 10

[1]) 54e jaargang 1975, luzern.

problematika

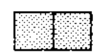


HUUB JANSEN

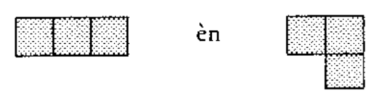
1

PENTOMINOOS

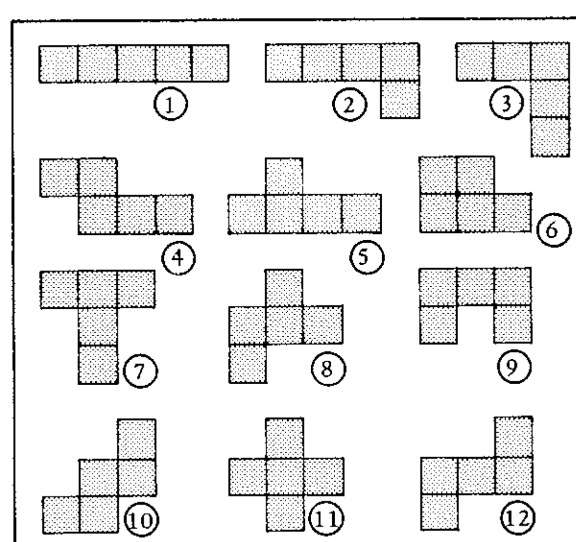
De oervorm van de dominostenen is bekend: twee vierkanten met een gemeenschappelijke zijde.



Met twee vierkanten is alleen deze vorm te maken. Een triminosteen is opgebouwd uit drie vierkanten.
Hiermee zijn meer mogelijkheden:

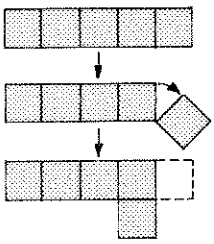


Uit vier vierkanten ontstaat een tetramino. Het is een simpel probleem om uit te zoeken *hoeveel verschillende tetraminostenen te maken zijn.*
We gaan een stapje verder. Een pentomino bestaat uit vijf vierkanten. Hier ziet u de familie van alle mogelijke pentominovormen.

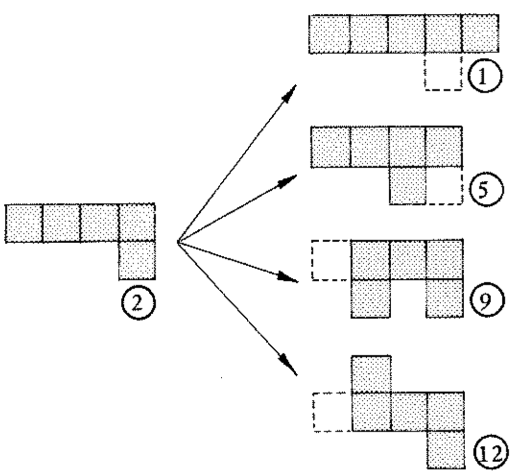


We hebben de pentominoos genummerd om er gemakkelijk mee te kunnen werken.
Door een 'uiteinde'-vierkant om een hoekpunt te draaien, wordt ① getransformeerd in ②:

[1]) Zie ook het in het voorgaande nummer opgenomen *prikbordprobleem (PP₄).* De basisschoolleerlingen werden aldaar uitgenodigd om al knippend zoveel mogelijk verschillende triminoos, tetraminoos en pentominoos te vinden.



Andere pentominovormen zijn met deze transformatie uit ① niet te fabriseren.
Wanneer we dezelfde transformatie op ② loslaten, dan is de oogst rijker:



Dit levert de eerste problemen op.

▶ *Welke familieleden zijn door deze transformatie uit elk van de twaalf pentominoos te halen?*

▶ *Welke vorm is hierbij het vruchtbaarst?*

Het eerste begin is er:

① ⟶ ②
② ⟶ ①, ⑤, ⑨, ⑫
③ ⟶
④ ⟶
....
....

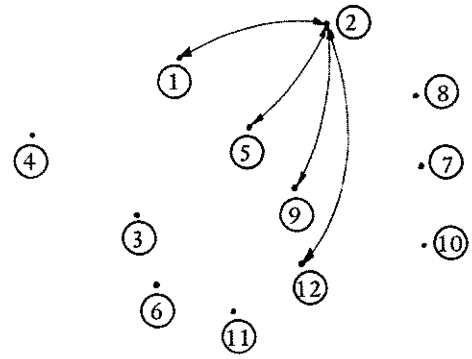
Wanneer u dit heeft opgelost, kunnen we verder.
Uit ① ontstaat ②. Uit ② kan ⑤ ontstaan. Uit ⑤ kan ....

▶ *Gaat dit steeds maar door? Anders gezegd: is ① de stamvader van de hele familie?*

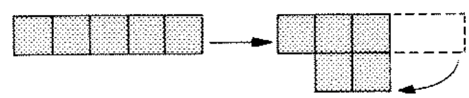
Mocht u tot de konklusie komen dat ① geen stamvader is, dan luidt de vraag:

▶ *Welke pentomino komt eventueel wel voor deze eretitel in aanmerking?*

Het aardige is, dat het antwoord op deze vragen 'doorzichtig' wordt met een goed schema:



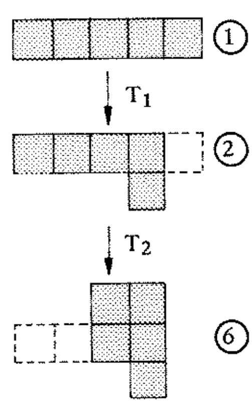
We introduseren nog een tweede transformatie:



Bij deze transformatie worden *twee* aangesloten 'uiteinde'-vierkanten om een hoekpunt gedraaid.

▶ *Wat levert de toepassing van deze transformatie op elk van de twaalf pentominoos op?*

▶ *En welke resultaten krijgen we als de eerste en deze tweede transformatie achter elkaar op een pentomino worden uitgevoerd, zoals in onderstaand voorbeeld?*



Pentominoos vormen een rijk uitgangspunt voor wiskundige aktiviteiten. En als u dit nu nog niet inziet, dan moet u voor straf alle twaalf pentominoos uitknippen en ze samen tot een rechthoek van 10 bij 6 leggen.

2

LEEFTIJD

De hoofdredakteur van dit tijdschrift streeft ernaar het laatste nummer van een jaargang te vullen met luchtige, plezante kost.

Goed voor publicity, marketing en promotion. Dit alles lijkt overbodig, goede wijn behoeft geen krans, maar toch proberen we de wens van onze hoofdredakteur te honoreren door u wat vakantiewerk aan te bieden.
Vakantie betekent vaak: vullen van laatste lessen, bezighouden van lastige kinderen tijdens regendagen onder lekkende tentdaken.
Kortom, veel treurnis, vragend om opfleuring met luchtige rekentruuks.

Hier de eerste!
Bedoeld om de leeftijd van uw partner te achterhalen. Vraag hem (of haar) zijn (haar) leeftijd in jaren aan het eind van het kalenderjaar op te schrijven. Hij mag niet laten zien, wat hij opschrijft.
Vraag hem vervolgens om de leeftijd, die hij volgend jaar hoopt te bereiken erbij op te tellen.
De uitkomst moet hij met 5 vermenigvuldigen.
Bij het resultaat van deze vermenigvuldiging moet hij het laatste cijfer van zijn geboortejaar optellen.
En van dit getal moet hij tenslotte 5 aftrekken.
U bent nu in staat om uit deze uitkomst zijn leeftijd te bepalen en .... te vertellen of hij (of zij) bij het opschrijven van zijn leeftijd de waarheid geen geweld heeft aangedaan.

Een voorbeeld om de gang van zaken te verduidelijken. Stel: uw partner is geboren in 1933 en dus op het eind van 1975 42 jaar oud.

- Hij schrijft op: 42
- leeftijd volgend jaar erbij optellen:
  $42 \xrightarrow{+43} 85$
- vermenigvuldigen met 5: $85 \xrightarrow{\times 5} 425$
- het laatste cijfer van 1933 erbij tellen:
  $425 \xrightarrow{+3} 428$
- van dit getal vijf aftrekken: $428 \xrightarrow{-5} 423$.

Resultaat: 423.
Zijn leeftijd wordt nu aangegeven door het getal gevormd door de eerste twee cijfers: **42$\cancel{3}$**.
Of uw partner de waarheid heeft gesproken, kunt u bepalen aan de hand van het laatste cijfer: 3.
Het laatste cijfer van het verschil tussen het jaar waarin we leven (1975) en dit cijfer, dus 1975 − 3 = 1972, moet gelijk zijn aan het laatste cijfer van zijn leeftijd.
Dit kunt u kontroleren aan de hand van de berekening van een dame, die alles korrekt berekent, maar met een te geflatteerde leeftijd begint.

Bijvoorbeeld:
- zij schrijft op 32 (in plaats van 36; ze is dus geboren in 1939)
- haar berekening:
  $32 \xrightarrow{+33} 65 \xrightarrow{\times 5} 325 \xrightarrow{+9} 334 \xrightarrow{-5} 329$
- het resultaat **32$\cancel{9}$** lijkt te kloppen, maar 1975 − 9 = 1966 en hier valt zij door de mand!

Misschien kunt u met deze rekentruuk uw omgeving amuseren. Nog aardiger is het om te analiseren waarop de truuk berust.

3

REKENTRUUKS

* Schrijf een getal op.
Tel het volgend getal erbij op.
Doe er 9 bij.
Deel door 2.
Trek het eerstgenoemde getal eraf.
Resultaat: altijd 5!
Voorbeeld:
$347 \xrightarrow{+348} 695 \xrightarrow{+9} 704 \xrightarrow{:2} 352 \xrightarrow{-347} \boxed{5}$

▶ *Verklaring?*

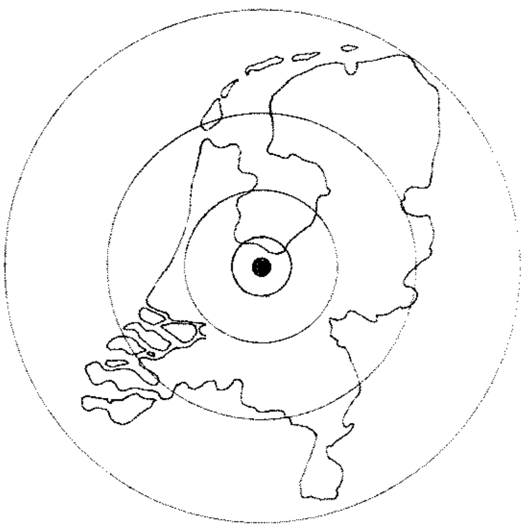
* * *

* Vraag uw partner een getal van twee cijfers op te schrijven, zonder dat u het kunt zien. Laat hem ook de som van dit getal en 6 opschrijven.
Hij heeft nu twee getallen. Hij moet beide getallen kwadrateren en daarna de twee kwadraten van elkaar aftrekken.
Uit dit verschil kunt u het oorspronkelijke getal vinden.
Voorbeeld:
- uw partner begint met : 43
- 6 erbij optellen : 49
- kwadrateren: 43 x 43 = 1849 en 49 x 49 = 2401
- aftrekken: 2401 − 1849 = 552; dit getal wordt bekend gemaakt
- u moet nu 552 delen door 2 x 6 = 12 (552 : 12 = 46)
- het door uw partner opgeschreven getal vindt u door de helft van 6 van deze laatste uitkomst af te trekken: 46 − 3 = 43.

▶ *Verklaring?*
▶ *Hoe verloopt deze truuk als uw partner een ander getal dan 6 bij het eerste getal optelt?*

de wiskobas-familie

berichten uit het binnenland



'DE EERSTE'

LOUIS GILISSEN

Van 24 tot en met 27 maart 1975 vond een wiskobaskonferentie plaats (getiteld: 'de eerste') voor docenten wiskunde-didaktiek en pedagogiek aan pedagogische akademies, voor docenten metodiek en pedagogiek aan opleidingsscholen voor kleuterleidsters, voor medewerkers van schooladviesdiensten.
Naast deze groepen die in ruime mate vertegenwoordigd waren, werd de konferentie bijgewoond door een grote groep genodigden, waaronder een afvaardiging van de rijksinspektie van het lager en kleuteronderwijs, de onderwijzeressen van de onderbouw van de ontwerpschool en onderwijsgevenden van andere bij de werkzaamheden van wiskobas betrokken scholen.
Om u een indruk te geven van de bedoeling van deze konferentie citeren we uit de inleiding van het programmaboekje:

> 'Deze konferentie *('de eerste')* is te beschouwen als een moment in de leerplanontwikkeling tijdens welke de 'afwikkeling' wat scherper voor het voetlicht wordt gebracht. Uw mening zal gevraagd worden over de resultaten van het werk in de afgelopen jaren en over de (gewenste) gang van zaken in de toekomst. Om dit met de nodige diepgang te kunnen doen is gekozen voor een eksemplarische werkwijze. De konferentie zal gesentreerd zijn rond een spesiaal voor de konferentie geschreven beschrijving van wiskunde-onderwijs voor klas 1;
> Meer konkreet kunnen we nu de *bedoelingen* van deze konferentie formuleren:
> * in een vroeg stadium – voordat de bespreekedities in nulde versie in de leerplanafwikkelingsprosedure worden opgenomen – een zo groot mogelijke groep geïnteresseerden inzicht geven in het schoolwerkplan van klas 1;
> * konsultatie van deze groep met betrekking tot
>   – de matematisch-didaktische inhoud van het ter konferentie uit te delen 'grote boek'
>   – prosedurele kanten van de leerplanafwikkeling als
>   de opzet van de afwikkeling
>   de gewenste vormgeving van de bespreekversies
>   de mogelijkheden om tot afwikkelingsgroepen te komen.'

In deze 'berichten' zullen we pogen u een idee te geven van de konferentie aan de hand van reakties van konferentie-deelnemers. Op diverse momenten tijdens de konferentie hebben we deelnemers gevraagd te reageren op voorafgaande programma-onderdelen.
We hebben de vraag zo open mogelijk gesteld, zodat ieder geheel op eigen wijze kon reageren.

* * *

Reakties

'De lezing van Jan van den Brink[1]) gaf een goed beeld van de veelheid en de rijke geschakeerdheid van de werkzaamheden in de ontwerpschool.
Het was plezierig om te horen dat in dat werk een zekere sistematiek zit. Uit allerlei zaken blijkt dat de ruimtelijke oriëntatie veel aksent krijgt. In veel vernieuwingen werd dit vroeger wel eens genoemd, maar het is nooit zo uitvoerig als hier aan de orde gekomen.
Het programma sluit overigens goed aan bij de huidige praktijk. Het is niet zo revolutionair, al zijn er goede vondsten aan te geven van dingen, die nog nooit gebeurd zijn in de eerste klas (grote hoeveelheden, roetes op waterland) en hebben dingen die wel al gebeurden, grotere generaliseringsmogelijkheden door de bredere kontekst, waarin ze geplaatst zijn (bijvoorbeeld het optellen en aftrekken).
Een probleem is wel dat er veel keuzemomenten zijn in het programma, terwijl de scholen niet over kriteria beschikken bij het maken van de keuzen.'

K.B. Koster
(wetensch. medewerker van het rion)

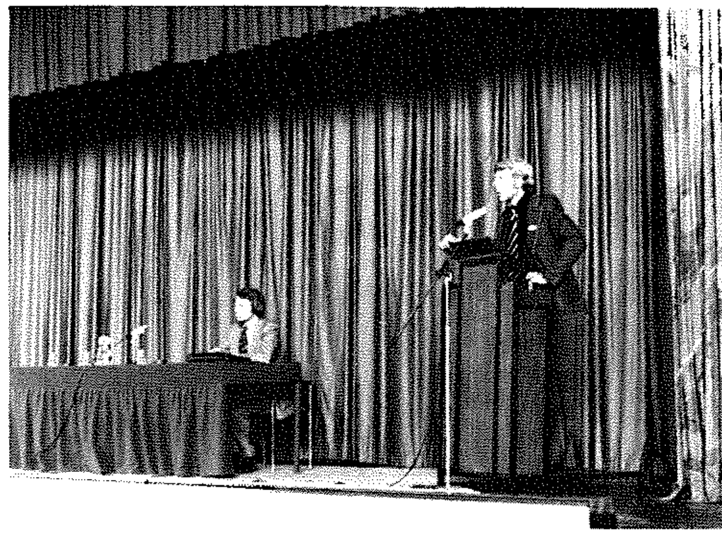
* * *

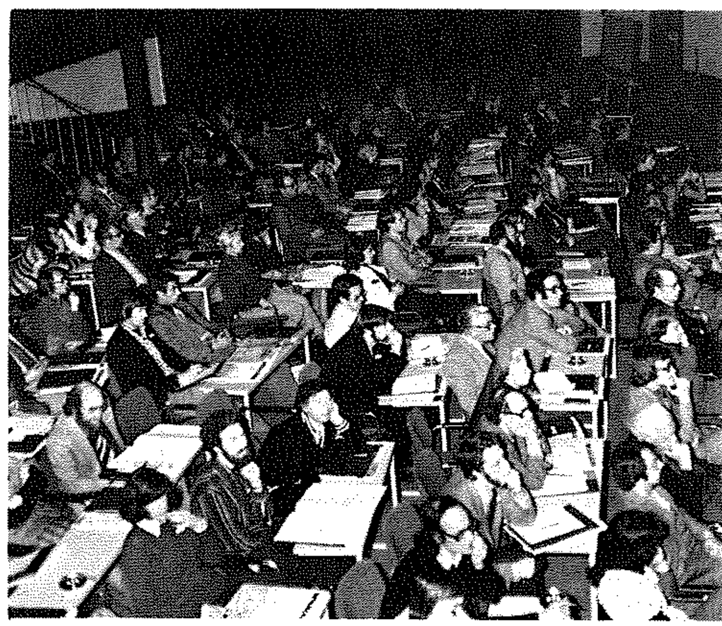
'Ik ben erg blij met dit overzicht van het programma van klas 1.[1]) Alleen zullen de mensen die voor het eerst hier zijn, en dat zijn er nogal wat, meer moeite hebben met het begrijpen van het een en ander dan de mensen die al een aantal jaren in het wiskobaswerk betrokken zijn.'

I.A. Verkruysse
(direkteur rijkspedagogische akademie te amersfoort)

* * *

'Het *1⁺ boek*[2]) is een uitstekend boek, waarmee duidelijk wordt wat voor een mogelijkheden er zijn om de nieuwe aanpak te realiseren. Een onderwijzer die goed is opgeleid en/of geheroriënteerd kan begrijpen hoe hij hiermee kan werken.
De gedachtenwisselingen die plaatsvinden zijn erg belangrijk, omdat daarin duidelijker de bedoelingen en achtergronden van het gepresenteerde onderwijs naar voren komen.



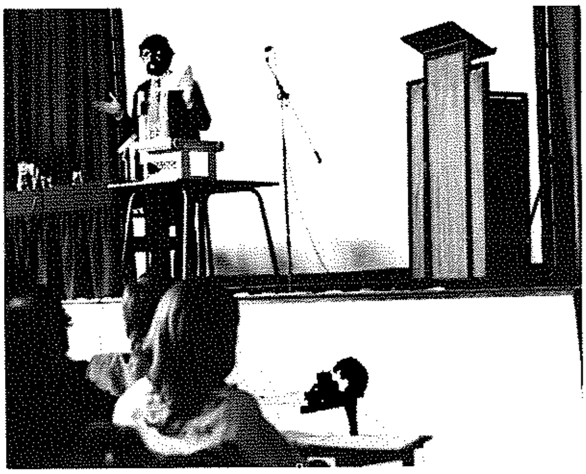


Ten aanzien van de toekomst zijn er twee punten die me intrigeren:
– welke rol zal het iowo gaan spelen in verband met de innovatie?

---

[1]) Lezing op maandagmiddag: Een globaal overzicht van het wiskundeonderwijs in klas 1; schets van de 'rode draad' en de achterliggende keuzemomenten.

[2]) Met het *1⁺ boek* wordt een op de konferentie uitgereikt boek bedoeld, dat een spesiaal voor deze konferentie bedoelde beschrijving bevat van wiskundeonderwijs voor klas 1.



– uit het 1⁺ boek blijkt duidelijk dat de onderwijzers(essen) een bepaalde habitus moeten verkrijgen om dit onderwijs te kunnen geven.

Dit laatste punt behoeft een korte toelichting. Een heroriëntering die nodig is om deze instelling te verkrijgen is een zaak die je in de loop van de tijd moet bekijken. Dat kan niet allemaal ineens. Wellicht zal een konferentie als deze een olievlek-reaktie te weeg brengen. Naast deze heroriëntering is ook belangrijk de hulp aan de onderwijzer tijdens het werk in de school door de schoolbegeleidingsdiensten. Een kadervorming van medewerkers van schoolbegeleidingsdiensten lijkt me dan ook van groot belang.

De aanpak van de konferentie is voortreffelijk.'

P. Neutelings
(hoofdinspekteur van de rijksinspektie voor het lager onderwijs)

* * *

'De zaak wordt open gepresenteerd. Het *1⁺ boek* geeft een voorbeeld, dat wil zeggen: er wordt gesteld dat er bij de meeste beoogde leeraktiviteiten en leerprocessen verschillende instapmogelijkheden zijn. De keuze hiervan hangt af van de onderwijzer en de kinderen.

Fred Goffree beschrijft, als hij het heeft over foto's op waterland[1]), hoe de onderwijzeres in de eerste klas van de ontwerpschool het idee krijgt om de hulsjes van lucifersdoosjes aan de kinderen uit te delen als 'fototoestellen' en hoe ze die gebruikt om de kinderen te laten ervaren wat er bijvoorbeeld met je beeld gebeurt (dat je door dat hulsje krijgt) als je een voorwerp of gebouw nadert of als je je er van verwijdert.[2])

Is het nu mogelijk dat analoge wiskundige (meetkundige) aktiviteiten op gang gebracht worden met ander materiaal, via een andere instap?

Het lijkt mij niet altijd mogelijk een scheiding te maken tussen de instap (een werkblad, een verhaal) en de beoogde leeraktiviteiten en leerprocessen.

Met betrekking tot de organisatie van de konferentie: het zou goed zijn de opdrachten in de werkgroepen duidelijker te formuleren, zodat men bijvoorbeeld duidelijk voor ogen heeft vanaf welke 'afstand' men naar de verschillende werkbladen en hoofdstukken uit het boek moet kijken.'

J. van Deursen
(stafmedewerker cito)

* * *

'De konferentie lijkt me kwa opzet en inhoud goed doordacht.

Een vraag blijft bij mij: hoe kan de aansluiting worden gemaakt met het kleuteronderwijs?

In het gepresenteerde materiaal komt een meer klassikale aanpak naar voren dan op het ogenblik in het kleuteronderwijs gebruikelijk is.'

Th. Semplonius
(inspektrice van de rijksinspektie voor het kleuteronderwijs)

* * *

'Als basisschoolwerker ervaar je tegenwoordig in toenemende mate een gevoel van onrust. Er komt zoveel op je af aan vernieuwingen,

---

[1]) Zie ook: wiskobas-bulletin, jaargang 4, nr. 1.

[2]) Lezing van maandagavond. Beschouwing over:
- met welke ogen kijken we naar een beschrijving van wiskundeonderwijs?
- met welke taal bespreken we het?

begeleidingsprojekten, kursussen en konferenties. En allemaal vind je ze nodig en belangrijk.
Die onrust wordt veroorzaakt enerzijds door de veelheid van de veranderingen en anderzijds door het vaak snel achterhaald zijn van die veranderingen. Je ziet bovendien de leerstof eerder toe- dan afnemen en je hebt het idee dat je niet voldoende van alles op de hoogte bent. En dat laatste ervaar je, op een konferentie als deze, heel sterk. Zeker in een zo heterogeen gezelschap als de groep deelnemers van deze konferentie.
Haal je mensen uit een breed onderwijsgebied bijeen, geef dan adekwate informatie aan alle groepen. Geef de veldwerker desnoods een stuk ekstra informatie, waardoor de gehanteerde wiskundetaal, als ook problemen van wiskundige aard, hem meer te zeggen hebben. Hij kan dan beter meepraten en meedenken. Geef vooral grote lijnen aan, waardoor een fragment altijd kan worden bekeken vanuit de totaliteit. Het lijkt me ook aan te bevelen meer in homogene groepen te werken, zodat in rapportages meer het eigene van deze groepen naar voren kan komen. Nu gaat er, dacht ik, nog veel wat waardevol is, verloren.
Met betrekking tot de hele konferentie tot nu toe moet ik overigens toch zeggen dat het een geweldige ervaring is voor mij. Het is een aanzet tot een opnieuw in overweging nemen van het rekenkundige gebeuren op de school waar ik zelf werkzaam ben, in het bizonder toegespitst op klas 1. Ik hoop dat spoedig ook de andere klassen aan bod zullen komen.'

L. Cuypers
(hoofd van een basisschool te utrecht)

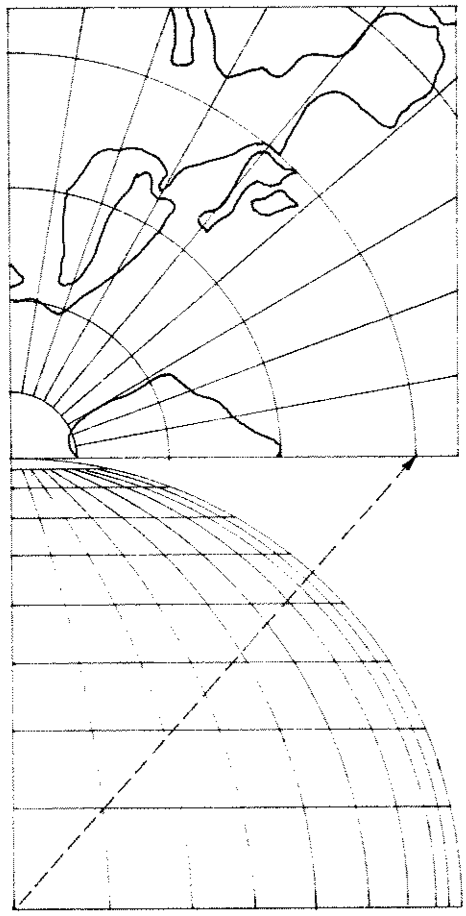
* * *

'Op een konferentie als deze kom je met twee bedoelingen: je wilt zoveel mogelijk opsteken dat van belang is voor je eigen praktisch werk in de basisschool en je wilt produktief meepraten.
Dat eerste heeft in deze konferentie in ruime mate plaatsgehad in plenaire zittingen en ook wel in de werkgroepen.
Het tweede was moeilijker. De oorzaak hiervoor was dat de uitgangsvisies van de deelnemers in de werkgroepen van maandag, dinsdag en woensdag nogal verschilden. Wij hebben zelf ervaren dat, als je in een deelgroepje tijdens zo'n werkgroepszitting aktief ging meepraten, je te maken kreeg met volkomen verschillende standpunten. Je moest dan maar zien dat je elkaar halverwege ergens kon vinden. Dat bleek erg moeilijk te zijn. Tijdens de laatste bijeenkomst[1]) met de basisschoolgroep was dat probleem er helemaal niet en hebben we uitstekend gewerkt.
Een volgende keer zouden er dan ook beter groepen gevormd kunnen worden, waarin de uitgangsvisies minder ver uit elkaar liggen of heterogene groepen waarin de verschillende uitgangsvisies even zwaar vertegenwoordigd zijn.'

R. van Rooy, H. Floor,
G. van de Brand
(onderwijsgevenden basisscholen te hilversum)

[1]) Na een inleiding op de donderdagmorgen over het vervolg van de aktiviteiten van wiskobas met betrekking tot de afwikkelingsprosedure, de voortgezette ontwikkeling en de assistentie bij de innovatie werden in temagroepen (tema's: basisschool, opleiding van kleuterleidsters, heroriëntering van onderwijzers, schoolbegeleidingsdiensten, pedagogische akademies, innovatiebeleid) spesifieke vraagpunten ter diskussie gesteld.

berichten uit het buitenland



KLAAS KOSTER

In de literatuur over de richting van onderwijsvernieuwingen wordt de laatste jaren een steeds groter aksent gelegd op het belang van het *voorschool*-onderwijs. Na een periode waarin de vernieuwingen zich konsentreerden op het sekundaire en primaire onderwijs, verschuiven bijvoorbeeld in zweden, engeland en westduitsland de prioriteiten in het onderwijsbeleid naar de uitbouw van het onderwijs aan leeftijdsgroepen beneden de leerplichtige leeftijd.

In december 1972 verscheen in *engeland* een rapport van de konservatieve minister van onderwijs, *mrs. M. Thatcher.* Dit rapport heeft als titel *'Education: a framework for expansion'.* In dit rapport wordt het onderwijs aan de 'under fives' voor het eerst sistematisch in de onderwijsvernieuwing betrokken.[1]) Het rapport gaat uit van de planning dat in 1981-1982 100 procent van de drie- en vierjarige engelse kinderen aan een vorm van voorschoolonderwijs zou deelnemen.

Een aanzet tot een strukturering van het voorschool-onderwijs in *zweden* (begin van de leerplicht: zeven jaar) werd in 1968 gegeven toen de minister van sociale zaken een advieskommissie instelde met de opdracht de situatie in het voorschool-onderwijs te onderzoeken. Van deze kommissie verscheen in mei 1972 een eindrapport, waarin voorstellen zijn gedaan voor de struktuur en inhoud van het onderwijs aan kinderen beneden de zeven jaar. Sinds 1971 heeft de zweedse regering het onderzoek naar vormen van voorschool-onderwijs gestimuleerd, onder andere door ekstra kredieten beschikbaar te stellen voor eksperimenten op dit terrein. De Reus (1974) heeft van de zweedse diskussie over het voorschoolonderwijs een nuttig overzicht gemaakt voor het nederlandse lezerspubliek. Hij geeft daarin aan welke mogelijkheden er zijn om het voorschool-onderwijs in zweden te struktureren en beschrijft tevens een aantal eksperimenten. De late opkomst van het voorschool-onderwijs in zweden is onder andere een gevolg van de geografische struktuur van dit land, terwijl daarnaast de opbouw van een nieuw sisteem voor het onderwijs aan 7- tot 16-jarigen in het verleden zoveel energie en geld kostte dat aan een strukturering van het onderwijs aan beneden zevenjarigen weinig aandacht is geschonken. De indruk wordt echter gewekt dat de

[1]) Sinds 1870 geldt in engeland de leerplicht al voor kinderen vanaf vijf jaar, zodat in vergelijking met veel andere landen het onderwijs aan vijf- tot zevenjarigen al op een vroeg tijdstip was geïnstitutionaliseerd.

zweedse regering op korte termijn de problematiek van het voorschool-onderwijs wil oplossen.
Allereerst wil men voor alle zesjarigen plaatsen in het voorschool-onderwijs kreëren en afhankelijk van de financiële middelen zal daarna het onderwijs voor jongere kinderen worden uitgebouwd.

Hetzelfde beeld als in engeland en in zweden levert de situatie in *westduitsland* op. In de onderwijsvernieuwingsplannen van de 'Bildungsrat' wordt het belang van het onderwijs aan drie- tot vijfjarige kinderen onderstreept, terwijl de bondsregering in een 'Bildungsbericht' van 1970 prioriteit geeft aan de uitbreiding van het voorschool-onderwijs. Verlaging van het begin van de leerplichtige leeftijd van zes naar vijf jaar zal voor 1980 worden ingevoerd; tevens wil men voor die tijd voor 75% van alle drie- tot vierjarige kinderen plaatsen in het voorschool-onderwijs scheppen (op dit moment bedraagt de deelname ca 30%).
Op het nivo van de deelstaten worden op veel plaatsen eksperimenten uitgevoerd om na te gaan welke vormen van voorschool-onderwijs uitvoerbaar zijn. Een belangrijk probleem in de uitvoering van de plannen vormen de kosten die aan deze uitbreiding van het onderwijs zijn verbonden. Volgens een schatting van de Bildungsrat bedragen de totale kosten per jaar 7,8 miljard mark als 75% van de drie- en vierjarigen en 100% van de vijfjarigen een vorm van voorschool-onderwijs bezoekt. Een mogelijkheid om deze kosten te drukken is het nivo van de opleiding van de leerkrachten te verlagen ten opzichte van de oorspronkelijke plannen. Het is dan echter wel de vraag of er voldoende belangstelling zal bestaan voor een funktie binnen het voorschool-onderwijs, gezien de daaruit voortvloeiende lagere salariëring van werkzaamheden.

* * *

Hoewel het voorgaande op het eerste gezicht weinig te maken heeft met de wiskobas-aktiviteiten, blijken in de proefnemingen met vormen van voorschool-onderwijs in het buitenland toch elementen aanwezig te zijn die ook voor de leerplanontwikkeling in het toekomstige nederlandse basisonderwijs voor vier- tot twaalfjarigen van nut kunnen zijn.
Als voorbeeld dient een projekt dat in de duitse deelstaat noordrijn-westfalen wordt uitgevoerd in 50 zogenaamde 'Vorklassen' voor vijfjarige kinderen en in 50 'Kindergärten'. In dat projekt gaat men door middel van een longitudinaal onderzoek na hoe de kinderen binnen deze scholen zich in een periode van enkele jaren ontwikkelen. Daarnaast wordt een beperkte groep kinderen over dezelfde periode intensiever onderzocht. In het onderzoek is voorzien in de ontwikkeling van een serie meetinstrumenten op het gebied van de kognitieve en sociaal-emotionele vaardigheden en attituden.
Winkelmann konstrueerde bijvoorbeeld een 'Testbatterie zur Entwicklung kognitiver Operationen' (afgekort tot 'Teko'), waarmee het logisch denken wordt gemeten. Het onderzoek zal in de zomer van 1975 worden afgesloten, terwijl aan het eind van 1975 een rapport zal worden gepubliseerd.
Voor nederlandse leerplan- en toetskonstrukteurs lijkt kennisname van dit projekt van belang, terwijl voor geïnteresseerde studenten aan een pedagogische akademie of kleuterleidstersopleidingsschool in het projekt zeker geschikte skriptie-onderwerpen te vinden zijn.

Literatuur
Schmalohr E., e.a.: Diskussion und Planung einer Vergleichsuntersuchung von 50 Modellkindergärten und 50 Vorklassen im Lande Nordrhein-Westfalen (in: Pre-School Education in Europe, pag 106-150, Paedagogica Europaea, IX, 1974, 1 – Malmberg, den bosch).

De Reus J.: Het voorschool-onderwijs in Zweden (algemeen pedagogisch studiecentrum, amsterdam 1974).

nieuw op de markt

'De ontwikkeling van het getalbegrip op de kleuterschool: een onderzoek naar de effekten van enkele trainingsprogramma's', aldus luidt de titel van *Klaas Koster's* onlangs verschenen dissertatie.[1])

De trainingsprogramma's behelzen behalve een taaltraining voor alle groepen (de kinderen dienen 'dezelfde taal' te verstaan) een *verzamelingen*training, een *tel*training en een *meet*training.

De *verzamelingen*training is gebaseerd op de teorieën van *Piaget* (waarin het 'kardinale' aspekt van het getal benadrukt wordt), de *tel*training sluit aan bij de ideeën van *Freudenthal* (meer aksent op het 'ordinale' aspekt) en de *meet*training bij die van *Gal'perin* (waarbij het getal ontwikkeld wordt vanuit het meten van kontinue grootheden).

Zoals vaak in dergelijke onderzoeken het geval is, is het moeilijk één duidelijke konklusie te trekken. Toch ontwikkelt Koster een kritische houding ten aanzien van Piaget's teorieën en doet zelfs voorzichtige aanbevelingen voor het aanvangsrekenen, waarbij zijn gedachten uitgaan naar de russische leerpsychologie. Zo schrijft hij op pag. 116 van zijn studie:

> 'Inzicht in de relatie tussen (maat)eenheid, grootheid en hoeveelheid lijkt binnen het rekenprogramma, zoals dat nu funktioneert in het merendeel van de Nederlandse scholen, van meer betekenis dan de introduktie van begrippen als inklusie, doorsnede etc.
> Vooral omdat het verband tussen het werken met inklusie en doorsnede en het overige rekenonderwijs vrijwel ontbreekt. Tevens blijkt het aanvangsrekenen aangevuld te kunnen worden met aktiviteiten waarin het herkennen van het reekskarakter van de getallenrij wordt gestimuleerd.'

Het is opmerkelijk hoeveel de 'oudste' kleuters al kennen en in korte tijd kunnen leren, zoals ook enige malen door Koster wordt gekonstateerd. De grote nivoverschillen tussen de kinderen onderling maken het ontwerpen van een algemeen leerplan voor het aanvankelijk rekenonderwijs echter tot een moeilijke zaak.

Dit prettig leesbare proefschrift van Koster kan ik van harte aanbevelen aan pedagogiekdocenten van kleuterleidstersopleidingen en pedagogische akademies, rekendidaktici en auteurs van basisschoolboeken.

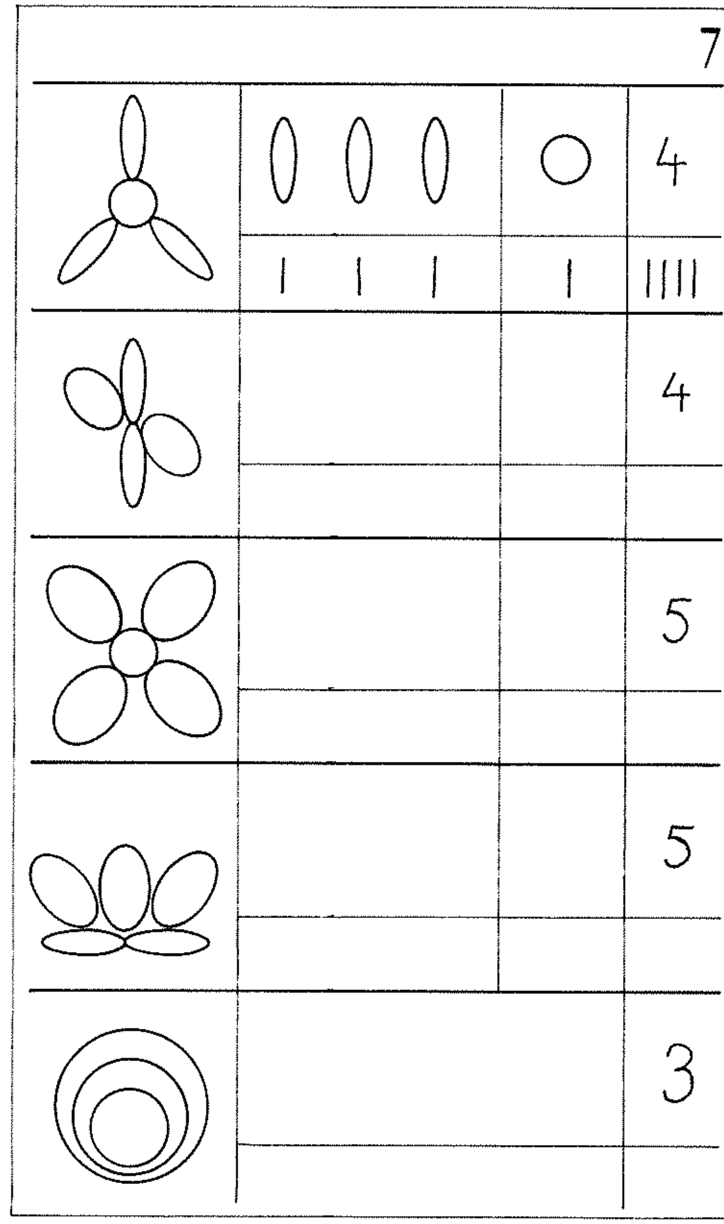
Aan deze studie zal binnenkort een wat uitgebreidere beschouwing gewijd worden.

* * *

ED DE MOOR

[1]) De handelseditie is verschenen bij Tjeenk Willink (prijs *f* 25,–).

Het nu volgende gaat niet *over* kleuters maar is spesiaal *voor* kleuters. Het betreft tien werkkaarten die horen bij een programma voor het voorbereidend rekenen, ontworpen door *A. Kooistra* in samenwerking met een aantal kleuterleidsters en basisschoolleerkrachten.[1]) Bij de werkkaarten zitten van die heerlijke plakfiguurtjes (rondjes, vierkantjes, ovaaltjes etc.) van sitspapier in mooie kleuren, waaraan ik uit mijn Fröbelschooltijd de beste herinneringen heb. Tevens een overzichtelijke handleiding en een notatie-informatiekaart om de prestaties van de kinderen bij te houden.
Het hoofddoel van de kaarten is het hoeveelheidsaspekt te oefenen. Begrippen en aktiviteiten als *meer, minder, evenveel, één meer, het leren tellen, splitsen, turven* en *schrijven van de cijfers* staan centraal. Het plakken van de figuurtjes kan voor de kleuters heel uitnodigend zijn, vooral door de leuke patronen die ze zelf kunnen bedenken. Voordat de kinderen een werkblad maken, oefenen ze eerst met kralen, mozaiëkstukjes, en dergelijke. Elk kind kan naar eigen idee de opdracht, die door de juf is gegeven, uitvoeren (zie bijvoorbeeld werkblad 7, dat hiernaast verkleind is opgenomen).



Daarna erover praten met de kinderen. Laat ze zelf onder woorden brengen wat ze *verschillend* gedaan hebben (taal!). Dit kan leiden tot oefeningen zoals *Dienes* zich voorstelt om met logiblokken te doen, maar het lijkt mij minder formalistisch en voorgestruktureerd. Ook al omdat de kinderen daarna zelf een werkblad mogen ontwerpen.
Leuke ideeën zijn bijvoorbeeld:
- bepaalde patronen laten klappen: □□▫▫▫; hard, hard, zacht, zacht, zacht, ...
- een 'dikteetje' geven: 'plak een blauw rondje, plak een rood rondje, dat even groot is, plak een vierkantje van een andere kleur dan je gebruikt hebt'.

* * *

Kinderen zijn over het algemeen sterk geïnteresseerd in treinen, boten, vliegtuigen en auto's. Er is met behulp van het spoorboekje heel wat leuk onderwijs te maken. De reizen van Kissinger rond de aarde inspireerden Leen Streefland tot het projekt 'Tijd, afstand en snelheid op onze aarde'.[2]) De onderwijzers, vooral van de hoogste klassen van het basisonderwijs en van het lager beroepsonderwijs, die zich tot dergelijke projekten aangetrokken voelen, zou ik willen aanraden eens kennis te nemen van het tijdschrift *Stivonstukken.*[3])
Stivon betekent *stichting vervoersvoorlichting voor het onderwijs.* In deze stichting werken samen: de landelijke studiecentra (aps, cps, kps), abop, kov en pcbop, de nederlandse spoorwegen, enige transportondernemingen, de klm, het centraal buro voor rijn en binnenvaart, de amsterdamse en rotterdamse haven, en anderen.
In nummer 1 van 1975 vond ik een artikel over de *tachograaf.* De werking van dit apparaat, dat juist in deze tijd in de belangstelling staat, wordt uitgelegd. Aan een gebruikte

---

[1]) Programma voor het voorbereidend rekenen; 10 werkbladen, handleiding, plakfiguurtjes (Tortel, amersfoort 1974).
[2]) Zie: wiskobas-bulletin, jaargang 4 nr. 1, 2, 3/4, 5.
[3]) Tijdschrift van Stivon, amsterdamseweg 55, amstelveen (tel. 020-491334).

schijf van een tachograaf is via grafieken heel wat meet- en rekenwerk te verrichten. De maatschappelijke relevantie (rijtijdenbesluit) kan hier ter sprake komen. Maar ook als we het blad niet alleen vanuit de wiskundehoek bekijken is er voor onderwijzer en leerling veel wetenswaardigs te ontdekken: dierenvervoer door de lucht, wilde planten op spoorwegemplacementen, zeezeilen, verkeersregels, historie van de luchtvaart, van stoomtrein naar stroomtrein, de metro (!), sleepboten, de kanaaltunnel, verkeersklaverbladen, geluidshinder, enz.

* * *

Over het beroepsonderwijs gesproken. In *Van Hiele's* boekje *Mogelijkheden van het wiskundeonderwijs*[1]) draagt hoofdstuk 10 de titel 'Moet het LBO zijn eigen leergang hebben?'
Deze open deur trapt Van Hiele bevestigend in. Hij gaat ervan uit dat de leerlingen in het lbo 'door elkaar een geringere intelligentie hebben' dan in het mavo en dat auteurs van lbo-leergangen ervan uit moeten gaan dat 'de leerlingen niet zeer gemotiveerd zullen zijn voor wiskunde en dikwijls zeer onaangename herinneringen hebben aan het rekenen op de basisschool'.
Oplossingen voor deze problemen zoekt hij in een betere motivatie ('nodig zijn leuke oefeningen waarvan de basis ernst is') en hij noemt dan koördinaten, vektoren, negatieve getallen, kansrekening en statistiek. Verder wordt 'telescoped reteaching' (Boermeester) en het gebruik van werkschriften geadviseerd.
Ik zou bovenstaande uitspraken niet graag voor mijn rekening willen nemen. Verscheidene malen heb ik vaklieden (timmerlui, elektriciens, automonteurs) ontmoet met een grotere 'praktische' intelligentie dan menig akademikus. Ik heb een timmerman zien rekenen beter dan een boekhouder, om van de marktkoopman maar te zwijgen. Het is heel goed mogelijk dat kinderen, die niet zo getalgericht zijn, toch gevoel hebben voor wiskundige aktiviteiten. Meerdere malen heb ik leerlingen ontmoet, die slechte herinneringen hadden aan het rekenen op de basisschool, maar toch goede prestaties in de wiskunde leverden.

De overige negen hoofdstukken die alle overdrukken zijn uit Van Hiele's boek 'Begrip & Inzicht'[2]), zijn overigens van harte aanbevolen.

---

[1]) Muusses, purmerend 1975 (prijs *f* 6,50).
[2]) Zie: wiskobas-bulletin, jaargang 3 nr. 4/5.

wiskunde: één grote fiktie

WATERLAND – EEN *FIKTIEF* EILAND

JAN VAN DEN BRINK

Het was een bewuste keuze om in het onderwijs van de eerste klas een fiktief eiland te situeren. Een eiland waarop alles door de kinderen moet worden *bedacht* en niets in werkelijkheid is uit te voeren – dit eiland bestaat immers niet.
Het heeft tal van voordelen om je *niet* met de konkrete realiteit bezig te houden:

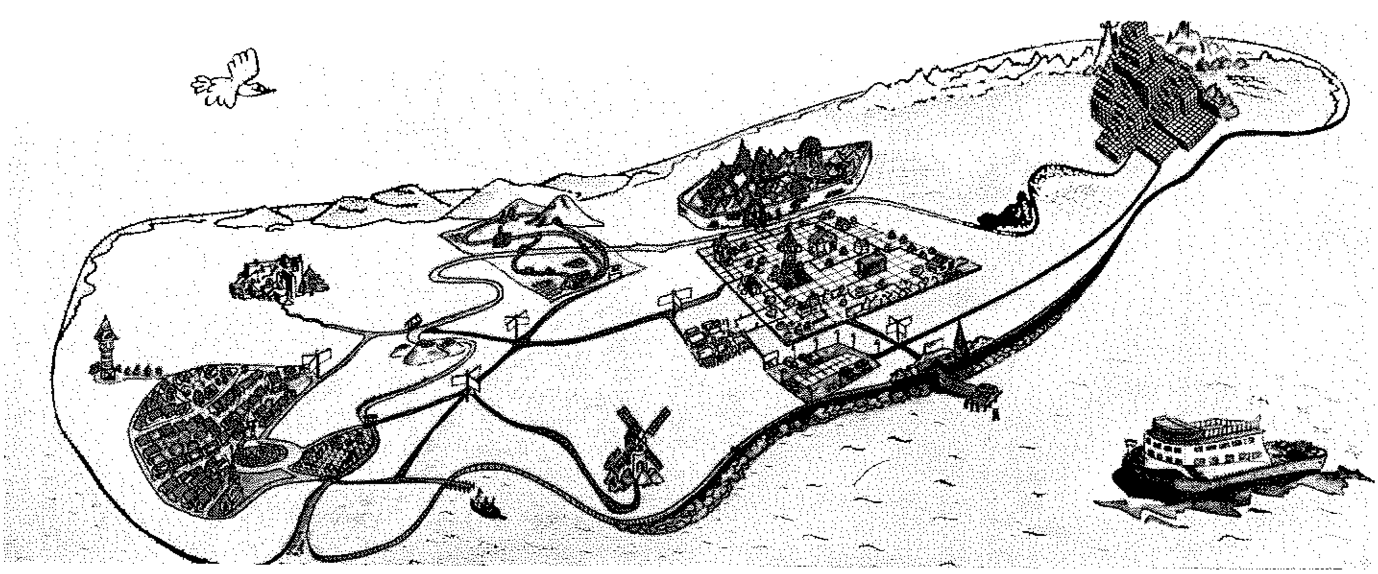
- je kunt alles zelf bedenken en je bent dus niet afhankelijk van 'reële faktoren' die je toevallig over het hoofd zou hebben gezien;
- je kunt in je eigen taaltje alles wat je bedenkt beschrijven;
- je kunt ook aparte 'taaltjes' maken; denk bijvoorbeeld aan een foto-serie die een rit op waterland simboliseert;
- je kunt ook praten over 'één kilometer' zonder dat je nu eksakt weet, wat ermee bedoeld wordt; het is iets dat met afstand te maken heeft, dat weten alle kinderen wel, maar dat het nu precies 1000 meter is ..... dat is hun vaak niet verteld.

De formulering 'is ..... verteld', werd in de laatste zin met opzet gebruikt, want ook het feit dat een 'kilometer' een afstand aangeeft, hebben de kinderen niet van zichzelf, lijkt ons.
De kinderen komen in feite op school met vage begrippen als 'kilometer', 'meter', 'kilogram', ... En wij, onderwijzenden, moeten op dit 'wereldje' aansluiten. Maar hóe doen we dat?

Om bijvoorbeeld de afstand te bepalen laten we de kinderen 'meten'. Voor jonge kinderen betekent dit dat je de meter of het meetlint met je handen *neerlegt* totdat de afstand *precies* is overbrugd. Vaak *zonder* het aantal keren te tellen dat de meter is neergelegd. Wíj willen echter juist dit aantal weten. Onze leerlingen maken zich ('helaas?') druk over geheel andere zaken:

- 'de meter past niet *precies*, juf'
- 'de weegschaal geeft niet *precies* aan dat potje A en potje B even zwaar zijn' (terwijl dat toch uw bedoeling was).

Voor kinderen betekent 'meten': *precies* afpassen (afwegen) en, in eerste instantie: *zonder te tellen.*
Dit *manuele meten* van konkrete dingen leidt ons echter af van de wiskundige aspekten bij het meten!
Meten kan ook beschouwd worden als een *mentaal-visuele* aktiviteit, die wonderwel kan aansluiten bij de denkwereldjes van kinderen. Hierop zouden we wat meer de aandacht willen vestigen.



'Hoeveel kilometer is deze weg op waterland, denk je?', vraagt juf.
'Vier kilometer.'
'Precies goed, zeg.'
'En hoeveel is die weg dan?' (acht kilometer in verhouding).
'Vijf kilometer', zegt de leerling echter.
'Dat kan toch niet, als deze weg vier kilometer is?'
'O, nee, ongeveer acht.'
'Zoek eens een weg van één kilometer ....'

Er is geen sprake van, dat de kinderen precies weten wat 'één kilometer' is (trouwens: wie weet dat wel?)
Toch kunnen we ermee 'denken': we gebruiken 'één kilometer' eenvoudigweg als een

formele grootheid, waarvan de kinderen al enige notie hebben en die meer *inhoud* krijgt wanneer zij ermee werken (zoals in bovengenoemd voorbeeld). Dat wil zeggen: wanneer we de kinderen eigenschappen laten ontdekken die spesifiek bij deze grootheid behoren ('dat kan toch niet, als deze weg vier kilometer is?').
Deze *mentaal-visuele* aktiviteiten (karakteristiek bij het bedrijven van wiskunde) kunnen ook bij het meten van *gewichten* aan de orde komen en wel vóórdat we gewichtsklassen manueel gaan vaststellen.

Juf toont twee boeken en vraagt hoe je, zonder weegschaal, kunt ontdekken welk boek het zwaarste is.
Naast de bekende suggestie 'wegen op de hand', merkt een jongen op: 'je moet het boek laten vallen, dan is het het zwaarst'.
Bedoelt hij misschien: iets dat zwaar is, laat je gemakkelijk vallen?

Even later in de les zitten alle kinderen in een kring om een personenweegschaal.
Bert staat op de weegschaal.
'25 kilo', zegt juf en bert moet maar eens proberen, of hij zwaarder kan worden.
Allerlei suggesties vliegen over en weer in de kring:
– 'je moet op je buik gaan liggen'
– 'je moet iets aantrekken'.
Bert zet zijn voeten op een andere plaats op de weegschaal en kijkt vol verwachting weer naar de wijzer.
– 'Als je op één been op de weegschaal gaat staan, word je lichter.'
– 'Als je slaapt, dan word je zwaarder.'

Uit de vele antwoorden blijkt dat *gewicht* voor sommige kinderen hetzelfde is als *arbeid, kracht.* Een slaper til je niet gemakkelijk op – 'hij geeft niet mee' –, dat wil zeggen: alle *arbeid* moet door de sjouwer alleen verricht worden.
Maar het *gewicht* van de slaper; blijft dat konstant?

De kinderen zijn daar niet zo zeker van, getuige de verbazing dat bert op de personenweegschaal maar niet zwaarder wil worden.
'Nee hoor, je blijft even zwaar – of je moet meer eten', roept een leerling tenslotte.

Blijkbaar komen de kinderen met allerlei vage noties op school. Ze 'weten' dat een kilometer iets te maken heeft met afstand, een kilogram met gewicht of arbeid ('Een kilogram zwaar', zegt een meisje).
Wij moeten met ons wiskundeonderwijs juist bij deze *gedachtenwereldjes* aansluiten. Het is mogelijk dat de term 'gedachtenwereldje van het kind' abusievelijk beperkt wordt tot sprookjes, kabouterverhalen, en dergelijke.

Wij bedoelen echter dat een leerling *zich* een verhaal, een verschijnsel, een afspraak *realiseert.* Dat wil zeggen: hij plaatst een (eigen) *realiteit* achter een verhaal, een verschijnsel, een beeld, een wiskundige formule.
Niet door direkt allerlei *manuele* metingen te verrichten, maar door voorspellingen te doen, eigenschappen te noemen. Kortom: door *mentaal-visuele* metingen uit te voeren, sluiten we bij die wereldjes aan.

Ligt hier niet een verschil tussen wiskunde- en natuurkundeonderwijs?
Aansluiten bij gedachtenwereldjes van kinderen, niet alleen bij het oriënteren en rekenen, maar zélfs bij een bij uitstek 'reëel' onderwerp als het meten.
Daarom kiezen we vóór de fiktie boven het manipuleren met 'konkreet' materiaal.
Bovendien is de wiskunde per slot van rekening toch één grote fiktie – niet waar? –

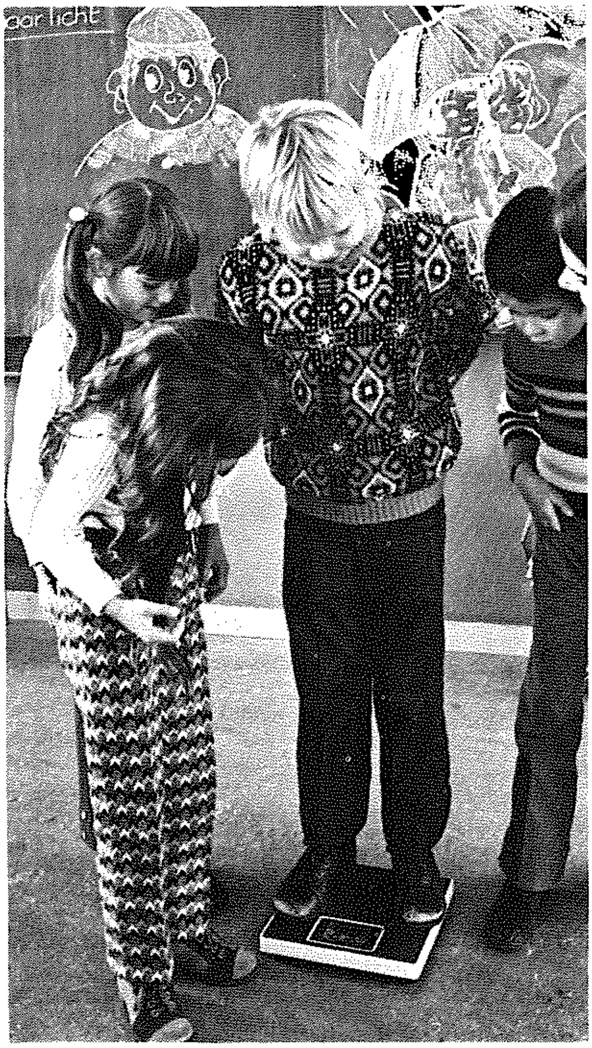
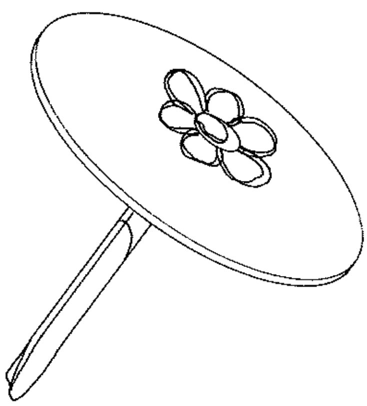


foto Max Arler

prikbord problemen



HANS TER HEEGE

Tot op heden hebben we vier prikbordproblemen gepubliseerd, die allemaal zo moeilijk waren, dat slechts enkele leerlingen ze zelfstandig konden oplossen. De bedoeling was aanvankelijk ook dat de kinderen werden geholpen door familie of kennissen. Natuurlijk zijn de prikbordproblemen wel te gebruiken voor het onderwijs maar in dat geval moeten ze anders geïntroduseerd worden.
Aan een prikbordprobleem kunnen de volgende eisen worden gesteld:

– het probleem moet jongeren én ouderen motiveren
– jongeren en ouderen horen in principe dezelfde uitgangspositie te hebben; dat wil zeggen: ouderen mogen geen direkt voordeel hebben van hun opleiding en ervaring.

Misschien voldoet PP_5 ook deze keer aan de voorwaarden.

Het probleem doet zich voor in een *klokkenwinkel*, waar de nieuwe kollektie klokken netjes geordend in een rek staat. De verzameling bestaat uit negen klokken die weliswaar allemaal verschillen, maar toch erg veel op elkaar lijken. Eén van deze negen klokken wordt vermist en we moeten erachter zien te komen hoe deze klok eruit ziet.
Het is niet zo gemakkelijk de overeenkomsten tussen de klokken te ontdekken. Daarvoor moet men de eigenschappen van de klokken herkennen en kunnen isoleren.
Welke eigenschappen zijn dat?
In ieder geval hebben de klokken een bepaalde *vorm:* rond, vierkant of achthoekig.
Sommigen hebben een zwarte *bel,* bij anderen is de bel wit.
Er zijn klokken *met* en klokken *zonder* wijzerplaat.
De klokken wijzen negen uur, vijf uur of één uur aan.
Maar hoe vinden we in dit geheel enige regelmaat, een orde die moet worden herkend als we de vermiste klok willen tekenen?
Hoe vaak komen de eigenschappen eigenlijk voor?
Er zijn drie klokken met een wijzerplaat, drie klokken zijn rond, enz.
Is de vermiste klok al te tekenen?
Sommige eigenschappen zijn gekoppeld aan andere. Zo staan klokken *met* een wijzerplaat altijd op negen uur. De oplossing komt in zicht bij de ontdekking dat in wezen slechts twee eigenschappen van belang zijn en dat de andere eigenschappen aan die twee zijn gekoppeld: de wijzerplaat hoort bij 'negen uur' en de zwarte bel hoort bij de ronde vorm van de klok.

Laten we de essentiële eigenschappen eens als volgt aangeven:
a (= achthoekig), *r* (= rond) en *v* (= vierkant)
1 (= één uur), *5* (= vijf uur) en *9* (= negen uur).

Er zijn nu negen kombinaties mogelijk:

a1 *r1* *v1*
a5 *r5* *v5*
a9 *r9* *v9*.

We kunnen deze kombinaties zó rangschikken in de onderstaande tabel dat in elke rij (horizontaal) èn in elke kolom (vertikaal) slechts één keer de eigenschappen *a*, *r* en *v* voorkomen en evenzo de eigenschappen *1*, *5* en *9*.

De parallel met het klokkenrek is hiermee duidelijk.
Door te proberen, vinden we een oplossing, bijvoorbeeld:

a1	*r9*	*v5*
v9	*a5*	*r1*
r5	*v1*	*a9*

Maar er zijn er meer. Uit ons probeersel kunnen we opmaken dat de eigenschappen *a*, *r* en *v* mooi gerangschikt zijn op de volgende manier:

a1	*r9*	*v5*	*a1*	*r9*	*v5*
v9	*a5*	*r1*	*v9*	*a5*	*r1*
r5	*v1*	*a9*	*r5*	*v1*	*a9*

Diagonaal, in de richting van de *hoofd*diagonaal.
De andere eigenschappen (*1*, *5* en *9*) steeds op de volgende manier:

a1	*r9*	*v5*	*a1*	*r9*	*v5*
v9	*a5*	*r1*	*v9*	*a5*	*r1*
r5	*v1*	*a9*	*r5*	*v1*	*a9*

Ook diagonaal, maar nu in de richting van de *neven*diagonaal.

Als we één diagonaal kiezen, blijven er nog twee mogelijkheden over, zoals in onderstaande diagrammen te zien is:

a1		
	a5	

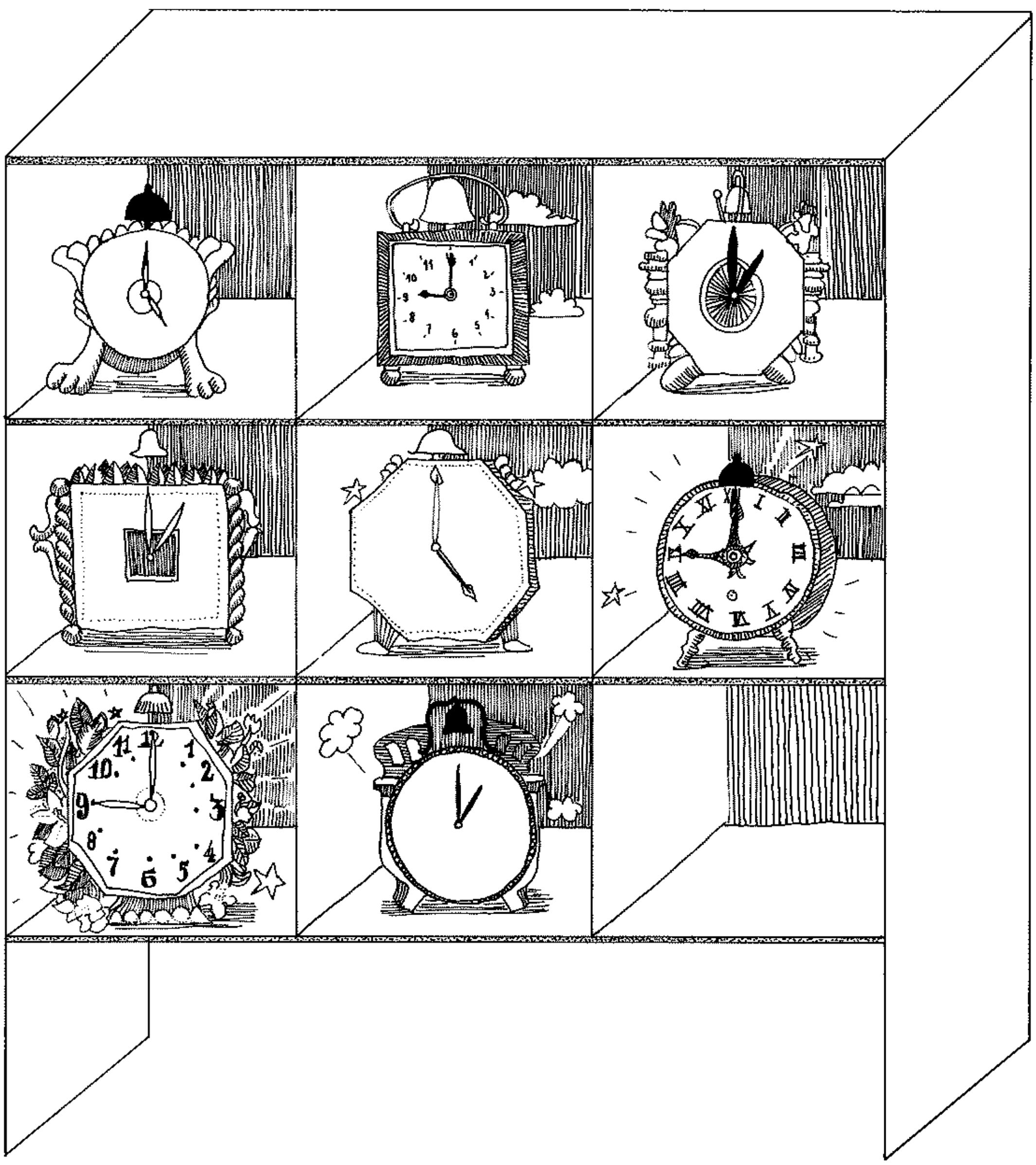
a1		*v5*
	a5	

a1		*r5*
	a5	

Met deze mogelijkheden ligt alles vast. Er blijft geen andere keuze meer over. De twee mogelijkheden die voortvloeien uit de keuze van één diagonaal, zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling om de hoofddiagonaal *a1* – *a5* – *a9*.

PP 5

In de klokkenwinkel staan de klokken netjes in een rek.
Alle klokken lijken een beetje op elkaar.
Kijk maar!



Als je goed kijkt, zie je dat de klokken op een bepaalde manier zijn neergezet.
Men houdt er kennelijk van orde en regelmaat.

Op een nacht is er een inbreker geweest die één klok heeft gestolen.

▶ *Kun jij de politie vertellen hoe die klok eruit ziet?*

▶ *Teken de klok maar in het lege vak!*